

# Contenido

---

## PARTE UNO INTRODUCCIÓN 1

### Capítulo 1

#### Naturaleza de la economía matemática 2

- 1.1 Economía matemática *versus* economía no matemática 2
- 1.2 Economía matemática *versus* econometría 4

### Capítulo 2

#### Modelos económicos 5

- 2.1 Elementos de un modelo matemático 5
  - Variables, constantes y parámetros* 5
  - Ecuaciones e identidades* 6
- 2.2 Sistema de números reales 7
- 2.3 Concepto de conjuntos 8
  - Notación de conjuntos* 9
  - Relaciones entre conjuntos* 9
  - Operaciones con conjuntos* 11
  - Leyes de operaciones con conjuntos* 12
  - Ejercicio 2.3* 14
- 2.4 Relaciones y funciones 15
  - Pares ordenados* 15
  - Relaciones y funciones* 16
  - Ejercicio 2.4* 19
- 2.5 Tipos de función 20
  - Funciones constantes* 20
  - Funciones polinomiales* 20
  - Funciones racionales* 21
  - Funciones no algebraicas* 23
  - Digresión acerca de exponentes* 23
  - Ejercicio 2.5* 24
- 2.6 Funciones de dos o más variables independientes 25
- 2.7 Niveles de generalidad 27

## PARTE DOS ANÁLISIS ESTÁTICO (O DE EQUILIBRIO) 29

### Capítulo 3

#### Análisis de equilibrio en economía 30

- 3.1 El significado de equilibrio 30
- 3.2 Equilibrio de mercado parcial; un modelo lineal 31
  - Construcción del modelo* 31
  - Solución mediante eliminación de variables* 33
  - Ejercicio 3.2* 34
- 3.3 Equilibrio de mercado parcial; un modelo no lineal 35
  - Ecuación cuadrática versus función cuadrática* 35
  - Fórmula cuadrática* 36
  - Otra solución gráfica* 37
  - Ecuaciones polinomiales de grado superior* 38
  - Ejercicio 3.3* 40
- 3.4 Equilibrio general de mercado 40
  - Modelo de mercado de dos artículos* 41
  - Ejemplo numérico* 42
  - Caso de  $n$  artículos* 43
  - Solución de un sistema general de ecuaciones* 44
  - Ejercicio 3.4* 45
- 3.5 Equilibrio en el análisis de ingreso nacional 46
  - Ejercicio 3.5* 47

### Capítulo 4

#### Modelos lineales y álgebra de matrices 48

- 4.1 Matrices y vectores 49
  - Matrices como arreglos* 49
  - Vectores como matrices especiales* 50
  - Ejercicio 4.1* 51
- 4.2 Operaciones con matrices 51
  - Suma y resta de matrices* 51
  - Multiplicación escalar* 52

## 8.6 Estática comparativa de modelos de funciones generales 205

- Modelo de mercado* 205
- Método de ecuaciones simultáneas* 207
- Uso de derivadas totales* 209
- Modelo de ingreso nacional (IS-LM)* 210
- Ampliación del modelo: economía abierta* 213
- Resumen del procedimiento* 216
- Ejercicio 8.6* 217

## 8.7 Limitaciones de la estática comparativa 218

# PARTE CUATRO

## PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN 219

### Capítulo 9

#### Optimización: una variedad especial de análisis de equilibrio 220

- 9.1 Valores óptimos y valores extremos 221
- 9.2 Máximo y mínimo relativo: criterio de la primera derivada 222
  - Extremo relativo en relación con extremo absoluto* 222
  - Criterio de la primera derivada* 223
  - Ejercicio 9.2* 226
- 9.3 Derivada segunda y derivadas de orden superior 227
  - Derivada de una derivada* 227
  - Interpretación de la segunda derivada* 229
  - Una aplicación* 231
  - Actitudes hacia el riesgo* 231
  - Ejercicio 9.3* 233
- 9.4 Criterio de la segunda derivada 233
  - Condiciones necesarias en relación con suficientes* 234
  - Condiciones para la maximización de la ganancia* 235
  - Coefficientes de una función de costo total cúbica* 238
  - Curva de ingreso marginal con pendiente ascendente* 240
  - Ejercicio 9.4* 241
- 9.5 Series de Maclaurin y series de Taylor 242
  - Serie de Maclaurin de una función polinomial* 242
  - Serie de Taylor de una función polinomial* 244
  - Expansión de una función arbitraria* 245

*Forma de Lagrange del residuo* 248

*Ejercicio 9.5* 250

## 9.6 Criterio de la $N$ -ésima derivada para el extremo relativo de una función de una variable 250

- Expansión de Taylor y extremo relativo* 250
- Algunos casos específicos* 251
- Criterio de la  $N$ -ésima derivada* 253
- Ejercicio 9.6* 254

## Capítulo 10

### Funciones exponenciales y logarítmicas 255

#### 10.1 Naturaleza de las funciones exponenciales 256

- Función exponencial simple* 256
- Forma gráfica* 256
- Función exponencial generalizada* 257
- Una base preferida* 259
- Ejercicio 10.1* 260

#### 10.2 Funciones exponenciales naturales y el problema de crecimiento 260

- El número  $e$*  260
- Una interpretación económica de  $e$*  262
- Interés compuesto y la función  $Ae^{rt}$*  262
- Tasa de crecimiento instantánea* 263
- Crecimiento continuo en relación con crecimiento discreto* 265
- Descuento y crecimiento negativo* 266
- Ejercicio 10.2* 267

#### 10.3 Logaritmos 267

- Significado de logaritmo* 267
- Logaritmo común y logaritmo natural* 268
- Reglas de los logaritmos* 269
- Una aplicación* 271
- Ejercicio 10.3* 272

#### 10.4 Funciones logarítmicas 272

- Funciones logarítmica y exponencial* 272
- Forma gráfica* 273
- Conversión de base* 274
- Ejercicio 10.4* 276

#### 10.5 Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas 277

- Regla de la función log* 277
- Regla de la función exponencial* 278
- Reglas generalizadas* 278
- Caso de base  $b$*  280
- Derivadas superiores* 280
- Aplicación* 281
- Ejercicio 10.5* 282

- 10.6 Fecha óptima** 282  
*Problema de almacenaje de vino* 282  
*Condiciones de maximización* 283  
*Problema del corte de madera* 285  
*Ejercicio 10.6* 286
- 10.7 Más aplicaciones de derivadas exponenciales y logarítmicas** 286  
*Determinación de la tasa de crecimiento* 286  
*Tasa de crecimiento de una combinación de funciones* 287  
*Determinación de la elasticidad puntual* 288  
*Ejercicio 10.7* 290

## Capítulo 11

### El caso de más de una variable de elección 291

- 11.1 Versión diferencial de condiciones de optimización** 291  
*Condición de primer orden* 291  
*Condición de segundo orden* 292  
*Condiciones diferenciales contra condiciones de derivadas* 293
- 11.2 Valores extremos de una función de dos variables** 293  
*Condición de primer orden* 294  
*Derivadas parciales de segundo orden* 295  
*Diferencial total de segundo orden* 297  
*Condición de segundo orden* 298  
*Ejercicio 11.2* 300
- 11.3 Formas cuadráticas, una incursión** 301  
*Diferencial total de segundo orden como una forma cuadrática* 301  
*Formas cuadráticas positivas definidas y negativas definidas* 302  
*Prueba de los determinantes para la definición de signo* 302  
*Formas cuadráticas de tres variables* 305  
*Formas cuadráticas de  $n$  variables* 307  
*Prueba de la raíz característica para definición de signo de una forma cuadrática* 307  
*Ejercicio 11.3* 312
- 11.4 Funciones objetivo con más de dos variables** 313  
*Condición de primer orden para el extremo* 313  
*Condición de segundo orden* 313  
*Caso de  $n$  variables* 316  
*Ejercicio 11.4* 317

- 11.5 Condiciones de segundo orden en relación con la concavidad y la convexidad** 318  
*Comprobación de concavidad o convexidad* 320  
*Funciones diferenciables* 324  
*Funciones convexas contra conjuntos convexas* 327  
*Ejercicio 11.5* 330
- 11.6 Aplicaciones económicas** 331  
*Problema de una empresa multiproducto* 331  
*Discriminación de precio* 333  
*Decisiones de una empresa relacionadas con los insumos* 336  
*Ejercicio 11.6* 341
- 11.7 Aspectos estáticos comparativos de la optimización** 342  
*Soluciones de forma reducida* 342  
*Modelos de función general* 343  
*Ejercicio 11.7* 345

## Capítulo 12

### Optimización con restricciones de igualdad 347

- 12.1 Efectos de una restricción** 347
- 12.2 Cómo encontrar los valores estacionarios** 349  
*El método de los multiplicadores de Lagrange* 350  
*El enfoque de la diferencial total* 352  
*Una interpretación de los multiplicadores de Lagrange* 353  
*Casos de  $n$  variables y de restricciones múltiples* 354  
*Ejercicio 12.2* 355
- 12.3 Condiciones de segundo orden** 356  
*Diferencial total de segundo orden* 356  
*Condiciones de segundo orden* 357  
*El hessiano orlado* 358  
*El caso de  $n$  variables* 361  
*El caso de las restricciones múltiples* 362  
*Ejercicio 12.3* 363
- 12.4 Cuasiconcavidad y cuasiconvexidad** 364  
*Caracterización geométrica* 364  
*Definición algebraica* 365  
*Funciones diferenciables* 368  
*Una mirada adicional al hessiano orlado* 371  
*Extremos absolutos contra extremos relativos* 372  
*Ejercicio 12.4* 374

**12.5 Maximización de utilidad y demanda del consumidor 374**

- Condición de primer orden 375*
- Condición de segundo orden 376*
- Análisis estático comparativo 378*
- Cambios proporcionales de los precios y del ingreso 381*
- Ejercicio 12.5 382*

**12.6 Funciones homogéneas 383**

- Homogeneidad lineal 383*
- Función de producción de Cobb-Douglas 386*
- Extensiones de los resultados 388*
- Ejercicio 12.6 389*

**12.7 Combinación de insumos de costo mínimo 390**

- Condición de primer orden 390*
- Condición de segundo orden 392*
- La trayectoria de expansión 392*
- Funciones homotéticas 394*
- Elasticidad de la sustitución 396*
- La función de producción de CES 397*
- La función de Cobb-Douglas como un caso especial de la función CES 399*
- Ejercicio 12.7 401*

**Capítulo 13****Temas adicionales de optimización 402****13.1 La programación no lineal y las condiciones de Kuhn-Tucker 402**

- Paso 1. Efecto de las restricciones de no negatividad 403*
- Paso 2. Efecto de las restricciones de desigualdad 404*
- Interpretación de las condiciones de Kuhn-Tucker 408*
- El caso de  $n$  variables,  $m$  restricciones 409*
- Ejercicio 13.1 411*

**13.2 Calificación de la restricción 412**

- Irregularidades en los puntos de frontera 412*
- Calificación de una restricción 415*
- Restricciones lineales 416*
- Ejercicio 13.2 418*

**13.3 Aplicaciones económicas 418**

- Racionamiento en tiempo de guerra 418*
- Fijación de precios a mercados no planeados originalmente 420*
- Ejercicio 13.3 423*

**13.4 Los teoremas de suficiencia en la programación no lineal 424**

- El teorema de suficiencia de Kuhn-Tucker: la programación cóncava 424*
- El teorema de suficiencia de Arrow-Enthoven: la programación cuasicóncava 425*
- Una prueba de calificación de restricción 426*
- Ejercicio 13.4 427*

**13.5 Funciones de valor máximo y el teorema de la envolvente 428**

- El teorema de la envolvente para la optimización sin restricciones 428*
- La función de ganancia 429*
- La condición de reciprocidad 430*
- El teorema de la envolvente para la optimización restringida 432*
- Interpretación del multiplicador de Lagrange 434*

**13.6 La dualidad y el teorema de la envolvente 435**

- El problema primal 435*
- El problema dual 436*
- Dualidad 436*
- La identidad de Roy 437*
- El lema de Shephard 438*
- Ejercicio 13.6 441*

**13.7 Algunas observaciones finales 442****PARTE CINCO****ANÁLISIS DINÁMICO 443****Capítulo 14****La dinámica económica y el cálculo integral 444****14.1 La dinámica y la integración 444****14.2 Integrales indefinidas 446**

- La naturaleza de las integrales 446*
- Reglas básicas de la integración 447*
- Reglas de operación 448*
- Reglas que incluyen la sustitución 451*
- Ejercicio 14.2 453*

**14.3 Integrales definidas 454**

- Significado de las integrales definidas 454*
- La integral definida como el área bajo la curva 455*
- Algunas propiedades de las integrales definidas 458*

- Otra visión de la integral indefinida* 460  
*Ejercicio 14.3* 460
- 14.4 Integrales impropias** 461  
*Límites infinitos de integración* 461  
*Integrando infinito* 463  
*Ejercicio 14.4* 464
- 14.5 Algunas aplicaciones de las integrales a la economía** 464  
*Desde una función marginal a una función total* 464  
*La inversión y la formación de capital* 465  
*El valor presente de un flujo de efectivo* 468  
*El valor presente de un flujo perpetuo* 470  
*Ejercicio 14.5* 470
- 14.6 El modelo de crecimiento de Domar** 471  
*Marcó de análisis* 471  
*Encontrando la solución* 472  
*El filo de la navaja* 473  
*Ejercicio 14.6* 474

## Capítulo 15

### Tiempo continuo: ecuaciones diferenciales de primer orden 475

- 15.1 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden con coeficientes constantes y términos constantes** 475  
*El caso homogéneo* 476  
*El caso no homogéneo* 476  
*Verificación de la solución* 478  
*Ejercicio 15.1* 479
- 15.2 La dinámica del precio de mercado** 479  
*El marco de referencia* 480  
*La trayectoria de tiempo* 480  
*La estabilidad dinámica del equilibrio* 481  
*Un uso alternativo del modelo* 482  
*Ejercicio 15.2* 483
- 15.3 Coeficiente variable y término variable** 483  
*El caso homogéneo* 484  
*El caso no homogéneo* 485  
*Ejercicio 15.3* 486
- 15.4 Ecuaciones diferenciales exactas** 486  
*Ecuaciones diferenciales exactas* 486  
*Método de solución* 487  
*El factor de integración* 489  
*Solución de las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden* 490  
*Ejercicio 15.4* 491

### 15.5 Ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden y primer grado 492

- Ecuaciones diferenciales exactas* 492  
*Variáveis separables* 492  
*Ecuaciones reducibles a la forma lineal* 493  
*Ejercicio 15.5* 495
- 15.6 El enfoque cualitativo gráfico** 495  
*El diagrama de fases* 495  
*Tipos de trayectoria de tiempo* 496  
*Ejercicio 15.6* 498
- 15.7 El modelo de crecimiento de Solow** 498  
*El marco de referencia* 498  
*Análisis cualitativo-gráfico* 500  
*Una ilustración cuantitativa* 501  
*Ejercicio 15.7* 502

## Capítulo 16

### Ecuaciones diferenciales de orden superior 503

- 16.1 Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden con coeficientes constantes y término constante** 504  
*La integral particular* 504  
*La función complementaria* 505  
*La estabilidad dinámica del equilibrio* 510  
*Ejercicio 16.1* 511
- 16.2 Números complejos y funciones circulares** 511  
*Números imaginarios y complejos* 511  
*Raíces complejas* 512  
*Funciones circulares* 513  
*Propiedades de las funciones seno y coseno* 515  
*Las relaciones de Euler* 517  
*Representaciones alternas de números complejos* 519  
*Ejercicio 16.2* 521
- 16.3 Análisis del caso de las raíces complejas** 522  
*La función complementaria* 522  
*Un ejemplo de solución* 524  
*La trayectoria de tiempo* 525  
*La estabilidad dinámica del equilibrio* 527  
*Ejercicio 16.3* 527

- 16.4** Un modelo de mercado con expectativas de precio 527  
*La tenencia de precios y las expectativas de precios* 527  
*Un modelo simplificado* 528  
*La trayectoria de tiempo de los precios* 529  
*Ejercicio 16.4* 532
- 16.5** La interacción de la inflación y el desempleo 532  
*La relación de Phillips* 533  
*La relación de Phillips aumentada con expectativas* 533  
*La retroalimentación de la inflación hacia el desempleo* 534  
*La trayectoria de tiempo de  $\pi$*  534  
*Ejercicio 16.5* 537
- 16.6** Ecuaciones diferenciales con un término variable 538  
*Método de los coeficientes indeterminados* 538  
*Una modificación* 539  
*Ejercicio 16.6* 540
- 16.7** Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior 540  
*Cómo encontrar la solución* 540  
*La convergencia y el teorema de Routh* 542  
*Ejercicio 16.7* 543

## Capítulo 17

### Tiempo discreto: ecuaciones en diferencias de primer orden 544

- 17.1** Tiempo discreto, diferencias y ecuaciones en diferencias 544
- 17.2** Solución de una ecuación en diferencias de primer orden 546  
*Método iterativo* 546  
*Método general* 548  
*Ejercicio 17.2* 551
- 17.3** La estabilidad dinámica del equilibrio 551  
*La importancia de  $b$*  551  
*La función de  $A$*  553  
*Convergencia al equilibrio* 554  
*Ejercicio 17.3* 554
- 17.4** El modelo de la telaraña 555  
*El modelo* 555  
*Las telarañas* 556  
*Ejercicio 17.4* 558

- 17.5** Un modelo de mercado con inventario 559  
*El modelo* 559  
*La trayectoria de tiempo* 560  
*Resumen gráfico de los resultados* 561  
*Ejercicio 17.5* 562

- 17.6** Ecuaciones en diferencias no lineales. Método gráfico cualitativo 562  
*Diagrama de fase* 562  
*Tipos de trayectoria de tiempo* 564  
*Un mercado con precio máximo* 565  
*Ejercicio 17.6* 567

## Capítulo 18

### Ecuaciones en diferencias de orden superior 568

- 18.1** Ecuaciones en diferencias lineales de segundo orden con coeficientes constantes y término constante 569  
*La solución particular* 569  
*La función complementaria* 570  
*La convergencia de la trayectoria de tiempo* 573  
*Ejercicio 18.1* 575
- 18.2** Modelo de interacción de multiplicador con acelerador de Samuelson 576  
*El marco de referencia* 576  
*La solución* 577  
*Convergencia contra divergencia* 578  
*Un resumen gráfico* 580  
*Ejercicio 18.2* 581
- 18.3** La inflación y el desempleo en tiempo discreto 581  
*El modelo* 581  
*La ecuación en diferencias en  $p$*  582  
*La trayectoria de tiempo de  $p$*  583  
*El análisis de  $U$*  584  
*La relación de Phillips de largo plazo* 585  
*Ejercicio 18.3* 585
- 18.4** Generalizaciones a ecuaciones con términos variables y de orden superior 586  
*El término variable con forma de  $cn^t$*  586  
*El término variable con forma de  $cp^t$*  587  
*Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior* 588  
*La convergencia y el teorema de Schur* 589  
*Ejercicio 18.4* 591

**Capítulo 19****Ecuaciones diferenciales y ecuaciones en diferencias simultáneas 592**

- 19.1 Génesis de los sistemas dinámicos 592  
*Los patrones interactuantes del cambio* 592  
*Transformación de una ecuación dinámica de orden superior* 593

- 19.2 Solución de ecuaciones dinámicas simultáneas 594  
*Ecuaciones en diferencias simultáneas* 594  
*Notación matricial* 596  
*Ecuaciones diferenciales simultáneas* 599  
*Comentarios adicionales sobre la ecuación característica* 601  
*Ejercicio 19.2* 602

- 19.3 Modelos dinámicos de insumo-producto 603  
*El desfaseamiento de tiempo en la producción* 603  
*La demanda excedente y el ajuste de la producción* 605  
*La formación de capital* 607  
*Ejercicio 19.3* 608

- 19.4 Modelo de inflación-desempleo, una vez más 609  
*Ecuaciones diferenciales simultáneas* 610  
*Trayectorias de solución* 610  
*Ecuaciones en diferencias simultáneas* 612  
*Trayectorias de solución* 613  
*Ejercicio 19.4* 614

- 19.5 Diagramas de fase de dos variables 614  
*Espacio de fase* 615  
*Curvas de demarcación* 615  
*Líneas de corriente* 617  
*Tipos de equilibrio* 618  
*La inflación y la regla monetaria según Obst* 620  
*Ejercicio 19.5* 623

- 19.6 Linealización de un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales 623  
*Expansión de Taylor y linealización* 624

- Linealización reducida* 625  
*Análisis local de estabilidad* 625  
*Ejercicio 19.6* 629

**Capítulo 20****Teoría de control óptimo 631**

- 20.1 Naturaleza del control óptimo 631  
*Ejemplo: un modelo macroeconómico simple* 632  
*El principio del máximo de Pontryagin* 633

- 20.2 Condiciones terminales alternativas 639  
*Punto terminal fijo* 639  
*Línea terminal horizontal* 639  
*Línea terminal vertical truncada* 639  
*Línea terminal horizontal truncada* 640  
*Ejercicio 20.2* 643

- 20.3 Problemas autónomos 644

- 20.4 Aplicaciones económicas 645  
*Maximización de utilidad a lo largo de todo el tiempo de vida* 645  
*Recurso no renovable* 647  
*Ejercicio 20.4* 649

- 20.5 Horizonte de tiempo infinito 649  
*Modelo neoclásico de crecimiento óptimo* 649  
*El hamiltoniano a valor presente* 651  
*Construcción de un diagrama de fase* 652  
*Análisis del diagrama de fase* 653

- 20.6 Limitaciones del análisis dinámico 654

**El alfabeto griego 655****Símbolos matemáticos 656****Breve lista de lecturas 659****Respuestas a ejercicios seleccionados 662****Índice 677**