



MINISTERIO DE CULTURA Y EDUCACION  
UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RIOS  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ECONOMICAS  
• BIBLIOTECA •

## INDICE

### CAPÍTULO PRIMERO

#### NÚMERO. VARIABLE. FUNCIÓN

§ 1.	Números reales. Representación de números reales por los puntos del eje numérico . . . . .	1
§ 2.	Valor absoluto de un número real . . . . .	3
§ 3.	Magnitudes variables y constantes . . . . .	4
§ 4.	Dominio de definición de una variable . . . . .	5
§ 5.	Variable ordenada. Variables crecientes y decrecientes. Variable acotada . . . . .	7
§ 6.	Función . . . . .	8
§ 7.	Formas diversas de expresión de funciones . . . . .	9
§ 8.	Funciones elementales principales. Funciones elementales . . . . .	11
§ 9.	Funciones algebraicas . . . . .	16

### CAPÍTULO II

#### LÍMITE Y CONTINUIDAD DE LAS FUNCIONES

§ 1.	Límite de una variable. Variable infinitamente grande . . . . .	22
§ 2.	Límite de una función . . . . .	25
§ 3.	Función que tiende a infinito. Funciones acotadas . . . . .	28
§ 4.	Infinitésimos y sus propiedades fundamentales . . . . .	32
§ 5.	Teoremas fundamentales sobre límites . . . . .	35
§ 6.	Límite de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ cuando $x \rightarrow 0$ . . . . .	40
§ 7.	El número $e$ . . . . .	42
§ 8.	Logaritmos naturales . . . . .	47
§ 9.	Continuidad de las funciones . . . . .	49
§ 10.	Propiedades de las funciones continuas . . . . .	53
§ 11.	Comparación de infinitésimos . . . . .	56

## CAPÍTULO III

## DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1.	Velocidad del movimiento . . . . .	63
§ 2.	Definición de la derivada . . . . .	64
§ 3.	Interpretación geométrica de la derivada . . . . .	66
§ 4.	Funciones derivables . . . . .	68
§ 5.	Cálculo de la derivada de las funciones elementales. Derivada de la función $y = x^n$ , siendo $n$ entero y positivo . . . . .	70
§ 6.	Derivadas de las funciones $y = \text{sen } x$ ; $y = \text{cos } x$ . . . . .	72
§ 7.	Derivada de una constante, del producto de una constante por una función, de la suma del producto y cociente de dos funciones . . . . .	74
§ 8.	Derivada de la función logarítmica . . . . .	79
§ 9.	Derivada de una función compuesta . . . . .	80
§ 10.	Derivadas de las funciones $y = \text{tg } x$ , $y = \text{ctg } x$ , $y = \ln  x $ . . . . .	83
§ 11.	La función implícita y su derivada . . . . .	85
§ 12.	Derivadas de la función potencial con exponente real cualquiera, de la función exponencial y de la función exponencial compuesta . . . . .	87
§ 13.	Función inversa y su derivación . . . . .	90
§ 14.	Funciones trigonométricas y sus derivadas . . . . .	94
§ 15.	Tabla de las principales fórmulas de derivación . . . . .	99
§ 16.	Funciones dadas en forma paramétrica . . . . .	100
§ 17.	Ecuaciones paramétricas de algunas curvas . . . . .	102
§ 18.	Derivada de una función dada paraméricamente . . . . .	105
§ 19.	Funciones hiperbólicas . . . . .	107
§ 20.	Diferencial . . . . .	110
§ 21.	Significado geométrico de la diferencial . . . . .	115
§ 22.	Derivadas de diversos órdenes . . . . .	116
§ 23.	Diferenciales de órdenes diversos . . . . .	119
§ 24.	Derivadas de diversos órdenes de las funciones implícitas y de las funciones definidas paraméricamente . . . . .	120
§ 25.	Interpretación mecánica de la derivada segunda . . . . .	123
§ 26.	Ecuaciones de la tangente y de la normal. Longitudes de la sub-tangente y de la subnormal . . . . .	124
§ 27.	Significado geométrico de la derivada del radio vector respecto al ángulo polar . . . . .	128

## CAPÍTULO IV

## TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1.	Teorema sobre las raíces de la derivada (teorema de Rolle) . . . . .	145
§ 2.	Teorema de los incrementos finitos (teorema de Lagrange) . . . . .	147
§ 3.	Teorema sobre el cociente de los incrementos de dos funciones (teorema de Cauchy) . . . . .	149
§ 4.	Límite del cociente de dos infinitésimos. (Cálculo del límite de indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ ) . . . . .	150

§ 5.	Límite del cociente de dos magnitudes infinitamente grandes. ( Cálculo del límite de indeterminaciones de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ ) .	153
§ 6.	Fórmulas de Taylor . . . . .	160
§ 7.	Desarrollo de las funciones $e^x$ $\sin x$ y $\cos x$ mediante la fórmula de Taylor . . . . .	164

CAPÍTULO V

ANÁLISIS DE LA VARIACIÓN DE LAS FUNCIONES

§ 1.	Generalidades . . . . .	172
§ 2.	Crecimiento y decrecimiento de una función . . . . .	173
§ 3.	Máximo y mínimo de las funciones . . . . .	175
§ 4.	Análisis del máximo y mínimo de una función derivable mediante la primera derivada . . . . .	181
§ 5.	Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada . . . . .	184
§ 6.	Valores máximo y mínimo de una función en un intervalo . . . . .	188
§ 7.	Aplicaciones a la teoría de máximos y mínimos de las funciones . . . . .	190
§ 8.	Análisis de los valores máximos y mínimos de una función mediante la fórmula de Taylor . . . . .	192
§ 9.	Convexidad y concavidad de las curvas. Puntos de inflexión . . . . .	195
§ 10.	Asíntotas . . . . .	201
§ 11.	Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficas . . . . .	207
§ 12.	Estudio de las curvas dadas en forma paramétrica . . . . .	212

CAPÍTULO VI

CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1.	Longitud del arco y su derivada . . . . .	225
§ 2.	Curvatura . . . . .	228
§ 3.	Cálculo de la curvatura . . . . .	230
§ 4.	Cálculo de la curvatura de una curva dada en forma paramétrica . . . . .	233
§ 5.	Cálculo de la curvatura de una curva dada en coordenadas polares . . . . .	234
§ 6.	Radio y círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta y evolvente . . . . .	236
§ 7.	Propiedades de la evoluta . . . . .	242
§ 8.	Cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación . . . . .	246

CAPÍTULO VII

NÚMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1.	Números complejos. Generalidades . . . . .	255
§ 2.	Operaciones fundamentales con números complejos . . . . .	257
§ 3.	Elevación a una potencia y extracción de la raíz de un número complejo . . . . .	260

§ 4.	Función exponencial de exponente complejo y sus propiedades . . . . .	263
§ 5.	Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo . . . . .	267
§ 6.	Descomposición de un polinomio en factores . . . . .	268
§ 7.	Raíces múltiples de un polinomio . . . . .	272
§ 8.	Descomposición en factores de un polinomio con raíces complejas . . . . .	273
§ 9.	Interpolación. Fórmula de interpolación de Lagrange . . . . .	275
§ 10.	Fórmula de interpolación de Newton . . . . .	277
§ 11.	Derivación numérica . . . . .	279
§ 12.	Aproximación de las funciones mediante polinomios. Teoría de Chebishev . . . . .	280

## CAPÍTULO VIII

## FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1.	Definición de las funciones de varias variables . . . . .	285
§ 2.	Representación geométrica de una función de dos variables . . . . .	287
§ 3.	Incremento parcial y total de la función . . . . .	288
§ 4.	Continuidad de las funciones de varias variables . . . . .	290
§ 5.	Derivadas parciales de la función de varias variables . . . . .	293
§ 6.	Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables . . . . .	295
§ 7.	Incremento total y diferencial total . . . . .	296
§ 8.	Aplicación de la diferencial total a cálculos aproximados . . . . .	300
§ 9.	Aplicación de la diferencial a la evaluación del error en cálculos numéricos . . . . .	302
§ 10.	Derivada de una función compuesta. Derivada total . . . . .	306
§ 11.	Derivación de funciones implícitas . . . . .	309
§ 12.	Derivadas parciales de órdenes superiores . . . . .	313
§ 13.	Superficies y líneas de nivel . . . . .	317
§ 14.	Derivadas según una dirección . . . . .	319
§ 15.	Gradiente . . . . .	321
§ 16.	Fórmula de Tavlör correspondiente a una función de dos variables . . . . .	325
§ 17.	Máximos y mínimos de una función de varias variables . . . . .	327
§ 18.	Máximos y mínimos de una función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos ligados) . . . . .	337
§ 19.	Ajuste de una función a unos datos experimentales por el método de mínimos cuadrados . . . . .	342

## CAPÍTULO IX

## APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRÍA DEL ESPACIO

§ 1.	Ecuaciones de una curva en el espacio . . . . .	357
§ 2.	Límite y derivada de una función vectorial de una variable independiente escalar. Ecuación de la tangente a una curva. Ecuación del plano normal . . . . .	360
§ 3.	Reglas de derivación de los vectores (funciones vectoriales) . . . . .	367
§ 4.	Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de la curva. Norma principal. Velocidad y aceleración de un punto animado de un movimiento curvilíneo . . . . .	370
§ 5.	Plano osculador. Binormal. Torsión . . . . .	380
§ 6.	Plano tangente y normal a una superficie . . . . .	385

CAPÍTULO X

INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1.	Función primitiva e integral indefinida . . . . .	393
§ 2.	Tabla de integrales . . . . .	396
§ 3.	Propiedades de la integral indefinida . . . . .	398
§ 4.	Integración por cambio de variable o por sustitución . . . . .	401
§ 5.	Integración de ciertas funciones que contienen un trinomio de segundo grado . . . . .	403
§ 6.	Integración por partes . . . . .	407
§ 7.	Funciones racionales. Fracciones racionales elementales y su integración . . . . .	411
§ 8.	Descomposición de una fracción racional en fracciones simples . . . . .	415
§ 9.	Integración de las fracciones racionales . . . . .	420
§ 10.	Método de Ostrogradski . . . . .	423
§ 11.	Integración de funciones irracionales . . . . .	426
§ 12.	Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	428
§ 13.	Integración de las integrales binomias . . . . .	432
§ 14.	Integración de funciones trigonométricas . . . . .	435
§ 15.	Integración de funciones irracionales mediante sustituciones trigonométricas . . . . .	441
§ 16.	Funciones cuyas integrales no pueden expresarse mediante funciones elementales . . . . .	443

CAPÍTULO XI

INTEGRAL DEFINIDA

§ 1.	Planteamiento del problema. Sumas inferior y superior . . . . .	458
§ 2.	Integral definida . . . . .	460
§ 3.	Propiedades fundamentales de la integral definida . . . . .	467
§ 4.	Cálculo de la integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz . . . . .	472
§ 5.	Cambio de variable en una integral definida . . . . .	477
§ 6.	Integración por partes . . . . .	479
§ 7.	Integrales impropias . . . . .	483
§ 8.	Cálculo aproximado de las integrales definidas . . . . .	492
§ 9.	Fórmula de Chébishev . . . . .	498
§ 10.	Integrales dependientes de un parámetro . . . . .	503
§ 11.	Integración de una función compleja de variable real . . . . .	507

CAPÍTULO XII

APLICACIONES GEOMÉTRICAS Y MECÁNICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1.	Cálculo de áreas en coordenadas rectangulares . . . . .	513
§ 2.	Área de un sector curvilíneo en coordenadas polares . . . . .	516
§ 3.	Longitud de un arco de curva . . . . .	518
§ 4.	Cálculo del volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas . . . . .	525

§ 5.	Volumen de un cuerpo de revolución . . . . .	527
§ 6.	Área de un cuerpo de revolución . . . . .	528
§ 7.	Cálculo del trabajo mediante la integral definida . . . . .	530
§ 8.	Coordenadas del centro de gravedad . . . . .	532
§ 9.	Cálculo de momentos de inercia mediante la integral definida . . . . .	537

## CAPÍTULO XIII

## ECUACIONES DIFERENCIALES

§ 1.	Planteamiento del problema . . . . .	547
§ 2.	Definiciones . . . . .	551
§ 3.	Ecuaciones diferenciales de primer orden (generalidades) . . . . .	552
§ 4.	Ecuaciones de variables separadas y separables . . . . .	557
§ 5.	Ecuaciones homogéneas de primer orden . . . . .	562
§ 6.	Ecuaciones que se reducen a ecuaciones homogéneas . . . . .	564
§ 7.	Ecuaciones lineales de primer orden . . . . .	568
§ 8.	Ecuación de Bernoulli . . . . .	572
§ 9.	Ecuaciones en diferenciales totales . . . . .	574
§ 10.	Factor integrante . . . . .	577
§ 11.	Envoltente de una familia de curvas . . . . .	579
§ 12.	Soluciones singulares de las ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . .	586
§ 13.	Ecuación de Clairaut . . . . .	588
§ 14.	Ecuación de Lagrange . . . . .	590
§ 15.	Trayectorias ortogonales e isogonales . . . . .	592
§ 16.	Ecuaciones diferenciales de orden superior a uno (generalidades) . . . . .	599
§ 17.	Ecuación de la forma $y^{(n)} = f(x)$ . . . . .	600
§ 18.	Algunos tipos de ecuaciones diferenciales de segundo orden que se reducen a ecuaciones de primer orden . . . . .	603
§ 19.	Método gráfico de integración de las ecuaciones diferenciales de segundo orden . . . . .	613
§ 20.	Ecuaciones lineales homogéneas. Definiciones y propiedades generales . . . . .	616
§ 21.	Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes . . . . .	623
§ 22.	Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de $n$ -ésimo orden con coeficientes constantes . . . . .	628
§ 23.	Ecuaciones diferenciales no homogéneas de segundo orden . . . . .	631
§ 24.	Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de segundo orden con coeficientes constantes . . . . .	635
§ 25.	Ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas de orden $n$ . . . . .	642
§ 26.	Ecuación diferencial de las oscilaciones mecánicas . . . . .	647
§ 27.	Oscilaciones libres . . . . .	649
§ 28.	Oscilaciones forzadas . . . . .	652
§ 29.	Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias . . . . .	656
§ 30.	Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes . . . . .	663
§ 31.	Nociones sobre la teoría de la estabilidad de Liapunov . . . . .	670
§ 32.	Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Euler . . . . .	676
§ 33.	Solución aproximada de las ecuaciones diferenciales por el método de las diferencias, basado en el empleo de la fórmula de Taylor. Método de Adams . . . . .	679
§ 34.	Método aproximado de integración de los sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden . . . . .	686

CAPÍTULO XIV

INTEGRALES MÚLTIPLES

1.	Integral doble . . . . .	707
2.	Cálculo de la integral doble . . . . .	710
3.	Cálculo de la integral doble (continuación) . . . . .	717
4.	Cálculo de áreas y volúmenes mediante integrales dobles . . . . .	724
5.	Integrales dobles en coordenadas polares . . . . .	727
6.	Cambio de variables en una integral doble (caso general) . . . . .	735
7.	Cálculo de áreas de superficies . . . . .	740
8.	Densidad de distribución de la materia e integral doble . . . . .	744
9.	Momento de inercia de una figura plana . . . . .	745
10.	Coordenadas del centro de gravedad de una figura plana . . . . .	751
11.	Integral triple . . . . .	753
12.	Cálculo de integrales triples . . . . .	754
13.	Cambio de variables en una integral triple . . . . .	761
14.	Momento de inercia y coordenadas del centro de gravedad de un cuerpo . . . . .	764
15.	Cálculo de las integrales dependientes de un parámetro . . . . .	766

CAPÍTULO XV

INTEGRALES CURVILÍNEAS E INTEGRALES DE SUPERFICIE

1.	Integral curvilínea . . . . .	775
2.	Cálculo de la integral curvilínea . . . . .	779
3.	Fórmula de Green . . . . .	786
4.	Condiciones para que una integral curvilínea no dependa del camino de integración . . . . .	788
5.	Integral de superficie . . . . .	794
6.	Cálculo de la integral de superficie . . . . .	796
7.	Fórmula de Stokes . . . . .	799
8.	Fórmula de Ostrogradski . . . . .	805
9.	Operador de Hamilton y algunas de sus aplicaciones . . . . .	808

CAPÍTULO XVI

SERIES

1.	Serie. Suma de una serie . . . . .	820
2.	Condición necesaria de convergencia de una serie . . . . .	823
3.	Comparación de series de términos positivos . . . . .	827
4.	Criterio de d'Alembert . . . . .	829
5.	Criterio de Cauchy . . . . .	833
6.	Criterio integral de convergencia . . . . .	835
7.	Series alternadas. Teorema de Leibniz . . . . .	839
8.	Series de términos positivos y negativos. Convergencia absoluta y condicional . . . . .	841
9.	Series de funciones . . . . .	845

§ 10.	Series mayorables . . . . .	847
§ 11.	Continuidad de la suma de una serie . . . . .	849
§ 12.	Integración y derivación de las series . . . . .	852
§ 13.	Series de potencias. Intervalo de convergencia . . . . .	855
§ 14.	Derivación de las series de potencias . . . . .	860
§ 15.	Series de potencias de $x - a$ . . . . .	862
§ 16.	Series de Taylor y de Maclaurin . . . . .	863
§ 17.	Ejemplos de desarrollo de funciones en series . . . . .	865
§ 18.	Fórmula de Euler . . . . .	867
§ 19.	Serie binomial . . . . .	867
§ 20.	Desarrollo de la función $\ln(1 + x)$ en serie de potencias. Cálculo de logaritmos . . . . .	870
§ 21.	Aplicación de las series al cálculo de integrales definidas . . . . .	873
§ 22.	Aplicación de las series a la integración de ecuaciones diferenciales . . . . .	875
§ 23.	Ecuación de Bessel . . . . .	878

## CAPÍTULO XVII

## SERIES DE FOURIER

§ 1.	Definición. Planteamiento del problema . . . . .	895
§ 2.	Ejemplos de desarrollo de funciones en serie de Fourier . . . . .	899
§ 3.	Una observación sobre el desarrollo de funciones periódicas en serie de Fourier . . . . .	904
§ 4.	Series de Fourier de funciones pares e impares . . . . .	907
§ 5.	Serie de Fourier de funciones de periodo $2l$ . . . . .	908
§ 6.	Desarrollo de una función no periódica en serie de Fourier . . . . .	910
§ 7.	Aproximación en media de una función dada mediante polinomios trigonométricos . . . . .	912
§ 8.	Integral de Dirichlet . . . . .	918
§ 9.	Convergencia de una serie de Fourier en un punto dado . . . . .	921
§ 10.	Algunas condiciones suficientes para la convergencia de una serie de Fourier . . . . .	923
§ 11.	Análisis armónico numérico . . . . .	927
§ 12.	Integral de Fourier . . . . .	928
§ 13.	Integral de Fourier en forma compleja . . . . .	932

## CAPÍTULO XVIII

## APLICACIONES FÍSICAS

§ 1.	Tipos fundamentales de ecuaciones de la física matemática . . . . .	937
§ 2.	Ecuación de las oscilaciones de una cuerda . . . . .	938
§ 3.	Solución de la ecuación de vibraciones de una cuerda por el método de separación de las variables (método de Fourier) . . . . .	942
§ 4.	Ecuación de difusión del calor de un vástago. Planteamiento del problema con condiciones de contorno . . . . .	946
§ 5.	Difusión del calor en el espacio . . . . .	948
§ 6.	Solución del primer problema de contorno para la ecuación de conducción del calor por el método de diferencias finitas . . . . .	952
§ 7.	Difusión del calor en un vástago ilimitado . . . . .	955

