



Contenido

Prólogo	xvii
1. Introducción	1
1.1. Por qué los economistas usan las matemáticas	1
Análisis matemático	2
1.2. El método científico en las ciencias empíricas	3
Modelos y realidad	4
1.3. El sistema de los números reales	5
Números naturales, enteros y racionales	5
El sistema decimal	6
Números reales	7
Desigualdades	7
Intervalos	8
Valor absoluto	9
1.4. Variables, símbolos y ecuaciones	11
Cómo resolver una ecuación	13
Ecuaciones cuadráticas	14
Ecuaciones lineales con dos variables	16
1.5. Algunos aspectos de lógica	19
Proposiciones	20
Implicaciones	20
Condiciones necesarias y suficientes	21
Resolución de ecuaciones	21
1.6. Demostración matemática	24
Razonamiento deductivo e inductivo	25
1.7. Teoría de conjuntos	26
Dar una propiedad	27
Pertenencia a un conjunto	28
Subconjuntos	28
Operaciones con conjuntos	28
Diagramas de Venn	30

2. Funciones de una variable: introducción	33
2.1. Introducción	33
2.2. Funciones de una variable real	34
Notación funcional	35
El dominio y el rango	37
2.3. Gráficas	40
Sistemas de coordenadas en el plano	40
Gráficas de ecuaciones en dos variables	42
Distancia entre dos puntos del plano	43
Circunferencias	43
2.4. Gráficas de funciones	46
Elección de unidades	47
Desplazamiento de gráficas	48
2.5. Funciones lineales	49
Cálculo de la pendiente	50
Las fórmulas punto-pendiente y punto-punto	51
Modelos lineales	52
Resolución gráfica de ecuaciones lineales	56
Desigualdades lineales	57
3. Polinomios, potencias y exponenciales	61
3.1. Funciones cuadráticas	61
3.2. Ejemplos de problemas de optimización cuadrática	65
3.3. Polinomios	68
Polinomios generales	68
Raíces enteras	69
El teorema del resto	70
División de polinomios	71
División de polinomios con resto	71
Funciones racionales	72
3.4. Funciones potenciales	74
Uso de las reglas de potenciación	76
Gráficas de funciones potenciales	77
3.5. Funciones exponenciales	79
3.6. El concepto general de función	83
4. Cálculo diferencial de una variable	87
4.1. Pendientes de curvas	87
4.2. La pendiente de la tangente y la derivada	89
Notación	92
4.3. Tasas de variación y su significado económico	95
Interpretaciones económicas	96
Derivabilidad y funciones empíricas	97
4.4. Una pincelada sobre límites	98
Una definición preliminar del concepto de límite	99
Reglas para los límites	101
4.5. Reglas sencillas de derivación	105
Regla de la potencia	107
4.6. Derivación de sumas, productos y cocientes	109

Sumas y diferencias	109
Productos	111
Cocientes	113
4.7. Derivadas de segundo orden y de orden superior	116
5. Más sobre derivación	119
5.1. La regla generalizada de la potencia	119
5.2. La regla de la cadena	122
Una formulación alternativa de la regla de la cadena	124
5.3. Derivación implícita	127
La derivada segunda de funciones definidas implícitamente	131
5.4. Aproximaciones lineales y diferenciales	133
La diferencial de una función	134
Reglas de diferenciación	135
5.5. Aproximaciones polinómicas	137
Aproximaciones cuadráticas	137
Aproximaciones de orden superior	138
5.6. La utilización de elasticidades en economía	141
La definición general de elasticidad	142
6. Límites, continuidad y series	145
6.1. Límites	146
Límites que no existen: límites laterales	146
Límites en el infinito	148
Advertencias	149
6.2. Continuidad	153
Funciones continuas	154
Propiedades de las funciones continuas	155
Continuidad lateral	157
6.3. Continuidad y derivabilidad	159
6.4. Sucesiones infinitas	162
6.5. Series	164
Series geométricas finitas	164
Series geométricas infinitas	165
Series generales (opcional)	167
6.6. Valor actual descontado e inversión	170
Proyectos de inversión	172
6.7. Un estudio riguroso de los límites (opcional)	173
Extensiones del concepto de límite	176
Una definición $\epsilon\delta$ de continuidad	177
7. Consecuencias de la continuidad y de la derivabilidad	179
7.1. El teorema del valor intermedio	179
7.2. El teorema de los valores extremos	182
7.3. El teorema del valor medio	184
7.4. Fórmula de Taylor	189
Fórmulas del binomio	191
El binomio de Newton para exponentes enteros positivos	192
7.5. Formas indeterminadas y regla de l'Hôpital	193

	Extensiones de la regla de l'Hôpital	195
7.6.	Funciones inversas	197
	Definición general	198
	Caracterización geométrica de las funciones inversas	200
8.	Funciones exponenciales y logarítmicas	207
8.1.	La función exponencial natural	207
8.2.	La función logarítmica natural	211
	La función $g(x) = \ln x$	213
	Derivación de funciones logarítmicas	214
	Derivación logarítmica	216
8.3.	Generalizaciones	219
	Logaritmos en bases distintas de e	219
	Una caracterización del número e	220
	Otro límite importante	221
	La función potencial general	221
	Fórmula de Taylor para e^x	222
8.4.	Aplicaciones de exponenciales y logaritmos	224
	Ecología	224
	Relaciones log-lineales	225
	Elasticidades y derivación logarítmica	225
8.5.	Interés compuesto y valores actuales descontados	228
	Comparación de las distintas formas de interés	229
	El valor actual de una deuda futura	230
9.	Optimización en una variable	233
9.1.	Definiciones básicas	233
9.2.	El test de la derivada primera para los puntos óptimos	235
9.3.	Maneras alternativas de hallar máximos y mínimos	239
	Cómo buscar los máximos y mínimos	240
9.4.	Máximos y mínimos locales	244
	El test de la primera derivada	245
	El test de la segunda derivada	247
9.5.	Funciones convexas y cóncavas y puntos de inflexión	252
	Ejemplos típicos	253
	Puntos de inflexión	254
	Un resultado útil	257
9.6.	Más sobre funciones cóncavas y convexas	260
	Desigualdad de Jensen	264
10.	Integración	267
10.1.	Áreas bajo curvas	268
	¿Qué ocurre si $f(x)$ tiene valores negativos en (a, b) ?	270
10.2.	Integrales indefinidas	272
	Algunas reglas generales	273
	Problemas con valores iniciales	275
10.3.	La integral definida	277
	Propiedades de la integral definida	278
	Derivación con respecto a los límites de la integral	279

	Las funciones continuas son integrables	280
	La integral de Riemann	280
10.4.	Aplicaciones económicas de la integración	282
	Extracción del petróleo de un pozo	282
	Reserva de divisas de un país	283
	Distribución de la renta	284
	La influencia de la distribución de la renta en la demanda	286
	Valor actual descontado de una renta futura continua	287
	Excedentes del consumidor y del productor	288
11.	Otros temas de integración	293
11.1.	Integración por partes	293
11.2.	Integración por sustitución	297
	Casos más complicados	299
11.3.	Extensión del concepto de integral	303
	Intervalos de integración infinitos	303
	Integrales de funciones no acotadas	305
	Un test de comparación para la convergencia	306
11.4.	Una nota sobre distribución de rentas y curvas de Lorenz	310
12.	Álgebra lineal: vectores y matrices	315
12.1.	Sistemas de ecuaciones lineales	316
	Modelos de Leontief	316
12.2.	Vectores	319
	Operaciones con vectores	319
12.3.	Interpretaciones geométricas de los vectores	323
	Interpretaciones geométricas de las operaciones vectoriales	324
	Interpretaciones geométricas de los vectores de un 3-espacio y de un n -espacio	325
12.4.	El producto punto	326
	Longitudes de vectores y la desigualdad de Cauchy-Schwarz	328
	Ortogonalidad	329
12.5.	Rectas y planos	331
	Hiperplanos	332
12.6.	Matrices y operaciones con matrices	335
	Operaciones con matrices	336
	Adición y multiplicación por un escalar	337
12.7.	Multiplicación de matrices	338
	Sistemas de ecuaciones en forma matricial	341
12.8.	Reglas para la multiplicación de matrices	342
	Potencias de matrices	344
	La matriz identidad	345
	Errores a evitar	346
12.9.	La traspuesta	348
	Matrices simétricas	349
12.10.	Eliminación gaussiana	351
13.	Determinantes y matrices inversas	355
13.1.	Determinantes de orden 2	355
	Interpretación geométrica	357

13.2.	Determinantes de orden 3	359
	Desarrollo por cofactores	359
	Una interpretación geométrica	361
	Regla de Sarrus	361
13.3.	Determinantes de orden n	363
13.4.	Reglas básicas para los determinantes	365
13.5.	Desarrollo por cofactores	371
	Desarrollo por cofactores de otra línea	372
13.6.	La inversa de una matriz	375
	Algunas consecuencias útiles	377
	Propiedades de la inversa	378
	Notas	378
	Resolución de ecuaciones por inversión de matrices	379
13.7.	Una fórmula general para la inversa	381
	Cálculo de inversas para operaciones elementales de filas	382
13.8.	Regla de Cramer	384
	Sistemas homogéneos de ecuaciones	386
14.	Otros temas de álgebra lineal	389
14.1.	Independencia lineal	389
	Dependencia lineal y sistemas de ecuaciones lineales	392
14.2.	El rango de una matriz	394
	Una manera eficiente de hallar el rango de una matriz	396
14.3.	Sistemas de ecuaciones lineales	397
	Ecuaciones sobrantes	399
	Grados de libertad	399
14.4.	Autovalores	403
	Cálculo de los autovalores	404
14.5.	Diagonalización	408
14.6.	El teorema espectral para las matrices simétricas	411
15.	Funciones de varias variables	415
15.1.	Funciones de dos o más variables	415
	Funciones de más de dos variables	416
	Dominios	418
15.2.	Representación geométrica de las funciones de varias variables	421
	Superficies en el espacio tridimensional	421
	La gráfica de una función de dos variables	422
	Curvas de nivel para $z = f(x, y)$	422
	Otras superficies del espacio tridimensional	425
	Funciones de n variables y el espacio euclídeo n -dimensional \mathbb{R}^n	425
	Continuidad	426
15.3.	Derivadas parciales en dos variables	427
	Derivadas parciales de orden superior	429
	Aproximaciones de las derivadas parciales	431
15.4.	Derivadas parciales y planos tangentes	432
	Planos tangentes	434
15.5.	Derivadas parciales de funciones de varias variables	436
	El teorema de Young	437

	Definiciones formales de derivadas parciales	438
15.6.	Derivadas parciales en economía	439
15.7.	Modelos lineales con objetivos cuadráticos	442
15.8.	Formas cuadráticas en dos variables	447
	Funciones cuadráticas generales de dos variables	449
	Formas cuadráticas con restricciones lineales	450
15.9.	Formas cuadráticas en varias variables	451
	El signo de una forma cuadrática	452
	El caso de formas semidefinidas	455
16.	Técnicas de estática comparativa	457
16.1.	La regla de la cadena	457
	Derivadas direccionales	460
	Una demostración (incompleta) de la regla de la cadena	461
16.2.	Generalizaciones de la regla de la cadena	463
	El caso general	464
	La fórmula de Leibniz	464
16.3.	Derivadas de funciones definidas implícitamente	468
	La ecuación general de la tangente a $F(x, y) = c$	470
	Una fórmula de la derivada segunda	472
	Consideraciones teóricas	472
16.4.	Elasticidades parciales	475
	Elasticidades de funciones compuestas	476
	La elasticidad de sustitución	477
16.5.	Funciones homogéneas de dos variables	480
	Aspectos geométricos de las funciones homogéneas	482
16.6.	Funciones homogéneas generales y funciones homotéticas	484
	Aplicaciones económicas	486
	Funciones homotéticas	487
16.7.	Más sobre derivación implícita	489
	El caso general	490
16.8.	Aproximaciones lineales y diferenciales	491
	La diferencial de una función de dos variables	491
	Reglas de diferenciación	493
	Invariancia de la diferencial	494
	La diferencial de una función de n variables	494
16.9.	Sistemas de ecuaciones	496
	Grados de libertad	497
	Cálculo de las derivadas parciales a partir de las diferenciales	498
16.10.	El teorema de la función implícita (opcional)	502
17.	Optimización en varias variables	505
17.1.	Dos variables: condiciones necesarias	506
17.2.	Dos variables: condiciones suficientes	510
17.3.	Puntos óptimos locales	514
17.4.	Máximos y mínimos con nociones de topología	518
	Definición de máximo y de mínimo	519
	Un resultado útil	519
	Topología del plano	520

Topología en \mathbb{R}^n	521
17.5. El teorema de los valores extremos	522
Cálculo de máximos y mínimos	523
17.6. Conjuntos convexos	527
17.7. Funciones cóncavas y convexas	529
Definición de funciones cóncavas y convexas	530
Desigualdad de Jensen	532
17.8. Condiciones útiles de concavidad y convexidad	534
17.9. Tests de la segunda derivada para concavidad y convexidad: el caso de dos variables	537
17.10. Tests de la segunda derivada para concavidad y convexidad: el caso de n variables ..	540
Condiciones de segundo orden para óptimos locales	542
17.11. Funciones cuasicóncavas y cuasiconvexas	545
Un criterio sobre el determinante para cuasiconcavidad	548
18. Optimización restringida	553
18.1. El método de los multiplicadores de Lagrange	553
18.2. Interpretación del multiplicador de Lagrange	559
18.3. Múltiples candidatos a solución	562
18.4. Por qué funciona el método de Lagrange	564
El argumento geométrico	564
El argumento analítico	565
18.5. Condiciones suficientes	567
Condiciones suficientes locales	568
18.6. Problemas más generales	570
El caso general	573
18.7. Interpretación de los multiplicadores de Lagrange en el caso general	576
18.8. Resultados sobre envolventes	578
18.9. Programación no lineal: un caso sencillo	582
¿Por qué funciona la regla?	585
18.10. Programación no lineal: más variables y más restricciones	587
18.11. Más sobre programación no lineal (opcional)	593
Condiciones de no negatividad para las variables	593
Una interpretación económica de los problemas de programación no lineal	595
Propiedades de la función valor	596
18.12. Algunos resultados más (opcional)	598
Condiciones necesarias	599
19. Programación lineal	603
19.1. Preliminares	603
Técnica gráfica para problemas PL sencillos	604
El problema PL general	607
19.2. Introducción a la teoría de la dualidad	609
El problema dual	610
El caso general	611
Formulación matricial	611
19.3. El teorema de dualidad	612
19.4. Una interpretación económica general	615
Las variables duales óptimas como precios sombra	616
19.5. Holgura complementaria	617

	Cómo la holgura complementaria puede ayudar a resolver problemas PL	619
	El teorema de Kuhn-Tucker aplicado a programas lineales	620
	Dualidad cuando algunas restricciones son igualdades	620
20.	Ecuaciones en diferencias	623
20.1.	Ecuaciones en diferencias de primer orden	623
	Ecuaciones de primer orden con coeficientes constantes	625
	Estados estacionarios y estabilidad	627
20.2.	Interés compuesto y valor actual descontado	631
20.3.	Ecuaciones lineales con coeficientes variables	633
20.4.	Ecuaciones de segundo orden	635
	Ecuaciones lineales	637
20.5.	Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes	640
	El caso no homogéneo	642
	Estabilidad	643
21.	Ecuaciones diferenciales	647
21.1.	Ecuaciones diferenciales de primer orden	647
	Teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales	649
	Hallar el camino conociendo la dirección	650
21.2.	Ecuaciones diferenciales de variables separables	651
21.3.	Ecuaciones diferenciales de variables separables II	656
21.4.	Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden I	660
21.5.	Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden II	664
	La solución de la ecuación general lineal dado un valor inicial	665
21.6.	Teoría cualitativa y estabilidad	667
	Estabilidad y diagramas de fase	667
21.7.	Ecuaciones diferenciales de segundo orden	671
	Ecuaciones lineales	672
21.8.	Ecuaciones de segundo orden con coeficientes constantes	674
	La ecuación no homogénea	677
	Estabilidad	678
A.	Álgebra elemental	681
A.1.	Potencias	681
	Propiedades de los exponentes	682
	Interés compuesto	683
	¿Son útiles los exponentes negativos?	684
A.2.	Raíces cuadradas	686
A.3.	Reglas algebraicas	688
	Igualdades importantes	689
	Expresiones algebraicas	690
A.4.	Factorizaciones	692
A.5.	Fracciones	695
	Reducción de fracciones	695
	Reglas de los signos	696
	Suma de fracciones	696
	Multiplicación y división de fracciones	698
A.6.	Ecuaciones sencillas y cómo resolverlas	701

A.7.	Desigualdades	703
	Otras propiedades de las desigualdades	704
	Diagramas de signos	704
	Desigualdades dobles	706
B.	Sumas, productos e inducción	709
B.1.	Notación sumatoria	709
B.2.	Reglas de las sumas	713
	Fórmulas útiles	715
	La fórmula del binomio de Newton	716
B.3.	Sumas dobles	718
B.4.	Productos	720
B.5.	Inducción	721
C.	Funciones trigonométricas	725
C.1.	Definiciones y resultados básicos	725
	Medición de ángulos en radianes	726
	Gráficas de la funciones trigonométricas	728
	Fórmulas trigonométricas	729
	Funciones más complejas	729
C.2.	Derivadas de funciones trigonométricas	732
	Funciones trigonométricas inversas	733
C.3.	Números complejos	736
	Definición de los números complejos	737
	Forma trigonométrica de los números complejos	738
	Nota	739
D.	Geometría	741
	Triángulos	741
	Circunferencias	741
	Prismas rectangulares	741
	Esferas	742
	Conos	742
	Pirámides	742
	Ángulos	742
	Proporciones	742
	Suma de los ángulos de un triángulo	743
	Teorema de Pitágoras	743
Bibliografía	745