

## MATEMÁTICA FINANCIERA

## SEGUNDA PARTE

## CAP. XIII. — INTERÉS COMPUESTO

|   | Págs. |
|---|-------|
| 1. Tiempo . . . . .   | 5     |
| 2. Capital y moneda . . . . .   | 6     |
| 3. Objeto y división de la Matemática financiera . . . . .              | 6     |
| 4. Diferentes valores de un capital en relación con el tiempo . . . . . | 7     |
| 5. Interés . . . . .  | 8     |
| 6. Descuento . . . . .  | 9     |
| 7. Valor actual, valor efectivo y valor final . . . . .                 | 10    |
| 8. Capitalización discontinua y capitalización continua . . . . .       | 13    |

## CAP. XIV. — CAPITALIZACIÓN DISCONTINUA

|   |    |
|---|----|
| 1. Interés compuesto obtenido por períodos enteros de tiempo . . . . .  | 15 |
| 2. Determinación del tiempo y del tanto . . . . .   | 18 |
| 3. <i>Problemas prácticos de interés compuesto para tiempos enteros.</i> Observación respecto al tiempo . . . . . | 22 |
| 4. 1. <sup>er</sup> problema: determinación del capital final . . . . .   | 23 |
| 5. 2. <sup>o</sup> problema: determinación del capital primitivo . . . . .  | 24 |
| 6. 3. <sup>er</sup> problema: determinación del interés . . . . .   | 28 |
| 7. 4. <sup>o</sup> problema: determinación del descuento . . . . .  | 29 |
| 8. 5. <sup>o</sup> problema: determinación del tiempo . . . . .   | 30 |
| 9. 6. <sup>o</sup> problema: determinación del tanto . . . . .  | 31 |
| 10. <i>Fraccionamiento del período de capitalización.</i> Tanto efectivo y tanto proporcional . . . . .           | 33 |
| 11. Tanto equivalente. Desarrollo en serie de $i$ e $i_k$ . . . . .   | 34 |
| 12. Ejemplo . . . . .   | 36 |
| 13. Tanto nominal . . . . .   | 37 |
| 14. Tanto nominal de descuento . . . . .  | 39 |
| 15. Capitalización compuesta para un tiempo cualquiera . . . . .  | 41 |
| 16. <i>Fórmula práctica en la capitalización compuesta.</i> Convención exponencial y convención lineal . . . . .  | 45 |
| 17. Valor del tanto . . . . .   | 47 |

|   | Págs. |
|---|-------|
| 18. Valor del tiempo . . . . .  | 49    |
| 19. Ejemplos. . . . .   | 51    |
| 20. <i>Cuestiones diversas en el interés compuesto.</i> Comparación del interés compuesto con el simple . . . . . | 53    |
| 21. Estudio gráfico de la función del interés compuesto . . . . .   | 55    |
| 22. Comparación del descuento compuesto con el simple . . . . .   | 57    |
| 23. Equivalencia de capitales de diferente vencimiento . . . . .  | 59    |
| 24. Vencimiento común . . . . .   | 61    |
| 25. Vencimiento medio . . . . .   | 63    |
| 26. Capital final múltiplo del actual . . . . .   | 64    |
| 27. Efectivo submúltiplo del nominal . . . . .  | 65    |
| 28. Equivalencia de valores finales o actuales . . . . .  | 65    |
| 29. Tanto medio. . . . .  | 66    |
| 30. Intereses anticipados . . . . .   | 68    |

### CAP. XV. — CAPITALIZACIÓN CONTINUA

|  |    |
|--|----|
| 1. Fórmula fundamental . . . . .                               | 71 |
| 2. Comparación del interés continuo con el compuesto . . . . . | 73 |
| 3. Tanto instantáneo . . . . .                                 | 73 |
| 4. Desarrollos en serie representativos de $\delta$ . . . . .  | 76 |
| 5. Cálculo del tiempo . . . . .                                | 77 |
| 6. Problemas prácticos de interés continuo . . . . .           | 77 |

### CAP. XVI. — RENTAS

|  |    |
|--|----|
| 1. Definiciones . . . . .  | 81 |
| 2. Su objeto. . . . .  | 82 |
| 3. Clasificaciones . . . . .   | 82 |
| 4. Valoración . . . . .  | 85 |
| 5. Expresión general del valor actual de una renta pagadera por atrasado . . . . . | 86 |
| 6. Ídem pagadera por adelantado . . . . .  | 88 |
| 7. Expresión general del valor final de una renta pagadera por atrasado . . . . .  | 90 |
| 8. Ídem pagadera por adelantado . . . . .  | 92 |
| 9. Relación entre valor actual y valor final . . . . .                             | 93 |

### CAP. XVII. — RENTAS CONSTANTES TEMPORALES

|  |     |
|--|-----|
| 1. Características . . . . .   | 95  |
| 2. Renta inmediata pagadera por atrasado; valores actual y final . . . . .     | 95  |
| 3. Estudio de la función $a_{\overline{n} }$ . . . . .                         | 99  |
| 4. Ídem de la $s_{\overline{n} }$ . . . . .                                    | 103 |
| 5. Cálculo práctico de valores actuales y finales. Ejemplo . . . . .           | 104 |
| 6. Desarrollos en serie de $a_{\overline{n} }$ y $s_{\overline{n} }$ . . . . . | 106 |

|   | Págs. |
|---|-------|
| 7. Ejemplo . . . . .  | 111   |
| 8. Cálculo del término. . . . .   | 112   |
| 9. Valor de una renta en un momento cualquiera . . . . .  | 113   |
| 10. Relaciones entre $a_{\overline{n} }$ y $s_{\overline{n} }$ y sus inversos . . . . .   | 115   |
| 11. Cálculo del tiempo . . . . .  | 120   |
| 12. Caso de tiempo compuesto de parte entera y fraccionaria . . . . .   | 121   |
| 13. Ejemplo . . . . .   | 125   |
| 14. Cálculo del tanto; cálculo de cotas, procedimientos de tanteo, por desarrollo en serie, por interpolación, por funciones trigonométricas, y por las fórmulas de BAILY . . . . . | 127   |
| 15. Ejemplo . . . . .   | 141   |
| 16. Renta inmediata pagadera por adelantado . . . . .   | 148   |
| 17. Valor actual y final . . . . .  | 149   |
| 18. Comparación de valores con las rentas pagaderas por atrasado . . . . .  | 151   |
| 19. Cálculo del término . . . . .   | 152   |
| 20. Valor en un momento cualquiera . . . . .  | 153   |
| 21. Cálculo del tiempo . . . . .  | 153   |
| 22. Cálculo del tanto . . . . .   | 155   |
| 23. Ejemplo . . . . .   | 155   |

CAP. XVIII.—RENTAS DIFERIDAS Y ANTICIPADAS

|   |     |
|---|-----|
| 1. Notación . . . . .   | 159 |
| 2. Valor actual de las rentas diferidas. . . . .                    | 159 |
| 3. Ídem de las rentas anticipadas . . . . .                         | 161 |
| 4. Valor final en las rentas diferidas y anticipadas . . . . .      | 161 |
| 5. Fórmulas generales para rentas diferidas y anticipadas . . . . . | 162 |
| 6. Número de períodos . . . . .                                     | 162 |
| 7. Tiempo en que se diferien o anticipan . . . . .                  | 164 |
| 8. Cálculo del tanto. Fórmula de BAILY . . . . .                    | 165 |

CAP. XIX.—RENTAS PAGADERAS POR FRACCIONES DE PERÍODO

|  |     |
|--|-----|
| 1. Concepto. . . . .   | 171 |
| 2. Valor actual . . . . .  | 171 |
| 3. Valor final . . . . .   | 177 |
| 4. Ejemplo . . . . .   | 179 |
| 5. Determinación del tiempo. Ejemplo . . . . .   | 180 |
| 6. Cálculo del tanto por uno. Ejemplo . . . . .  | 181 |
| 7. Rentas diferidas y anticipadas pagaderas por fracciones de período . . . . .                  | 183 |
| 8. Caso en que no coincidan el fraccionamiento de la renta con el de la capitalización . . . . . | 184 |
| 9. El número de subperíodos no es múltiplo de $k$ . . . . .                                      | 186 |

## CAP. XX.—RENTAS CONSTANTES PERPETUAS

|   | Págs. |
|---|-------|
| 1. Concepto . . . . .                                 | 189   |
| 2. Valor actual en todos los casos . . . . .          | 189   |
| 3. Ídem en función de las rentas temporales . . . . . | 196   |
| 4. Estudio de la función $a_{\infty}$ . . . . .       | 196   |
| 5. Determinación de los restantes elementos . . . . . | 197   |
| 6. Ejemplo . . . . .                                  | 199   |
| 7. Rentas continuas. . . . .                          | 200   |

## CAP. XXI.—RENTAS VARIABLES

|   |     |
|---|-----|
| 1. Generalidades . . . . .  | 203 |
| 2. Rentas variables cada $k$ periodos . . . . .                                 | 203 |
| 3. <i>Rentas variables en progresión aritmética</i> . . . . .                   | 205 |
| 4. Valor actual . . . . .   | 205 |
| 5. Ejemplo . . . . .  | 208 |
| 6. Rentas variables en progresión aritmética, decrecientes . . . . .            | 209 |
| 7. Ejemplo . . . . .  | 210 |
| 8. Valor final . . . . .  | 210 |
| 9. Tanto y tiempo. Ejemplo. . . . .   | 211 |
| 10. Cálculo del primer término y de la razón . . . . .                          | 212 |
| 11. <i>Increasing y Decreasing Annuity</i> . . . . .                            | 213 |
| 12. Rentas con amortización constante . . . . .                                 | 216 |
| 13. Rentas con amortización múltiplos de la primera o de la última . . . . .    | 217 |
| 14. <i>Rentas en progresión geométrica</i> . . . . .                            | 220 |
| 15. Ejemplo . . . . .   | 224 |
| 16. Rentas con amortización igual a una fracción del capital restante . . . . . | 225 |
| 17. Rentas variables pagaderas por adelantado. . . . .                          | 226 |
| 18. Fraccionamiento del período en las rentas variables . . . . .               | 228 |
| 19. Rentas variables diferidas y anticipadas. . . . .                           | 231 |
| 20. Rentas variables perpetuas . . . . .  | 233 |

## CAP. XXII.—CUESTIONES DIVERSAS SOBRE RENTAS

|   |     |
|---|-----|
| 1. Combinaciones del capital y renta. Ejemplo . . . . .                               | 237 |
| 2. Cuentas corrientes a interés compuesto. Ejemplo . . . . .                          | 238 |
| 3. Vencimiento medio de los términos de una renta . . . . .                           | 240 |
| 4. Transformación de un capital en renta y viceversa, y de una renta en otra. . . . . | 241 |
| 5. Ejemplos . . . . .   | 243 |
| 6. Rentas con intereses anticipados . . . . .   | 247 |

## TERCERA PARTE

## AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS Y EMPRÉSTITOS

## CAP. XXIII. — PRÉSTAMOS

|   | Págs. |
|---|-------|
| 1. Generalidades . . . . .  | 249   |
| 2. Préstamos amortizables con un pago único, sin abono periódico de interés.  | 249   |
| 3. Ídem con abono periódico de interés. . . . .   | 252   |
| 4. Emisiones de Bonos del Tesoro. . . . .   | 254   |
| 5. Ejemplo . . . . .  | 255   |
| 6. Fondo de amortización . . . . .  | 255   |
| 7. Reintegro anticipado . . . . .   | 258   |
| 8. Ejemplo . . . . .  | 260   |
| 9. Valoración de deudas en un momento cualquiera: usufructo y nuda propiedad. Ejemplo. Fórmula de MAKEHAM . . . . .     | 261   |
| 10. Ejemplo . . . . .   | 266   |
| 11. <i>Amortización mediante una renta de término constante.</i> Deducción de fórmulas en función del término . . . . . | 267   |
| 12. Cuadro de amortización . . . . .  | 271   |
| 13. Ejemplo. . . . .  | 275   |
| 14. Cancelación anticipada . . . . .  | 278   |
| 15. Valoración prospectiva y retrospectiva . . . . .  | 278   |
| 16. Nuda propiedad y usufructo . . . . .  | 280   |
| 17. Ejemplo. . . . .  | 285   |
| 18. Determinación del tanto efectivo de inversión . . . . .   | 287   |
| 19. Reconstitución del capital a un tanto diferente . . . . .   | 287   |
| 20. Vencimiento medio de los términos, cuotas de interés y cuotas de amortización . . . . .                             | 289   |
| 21. Amortización de préstamos con pago anticipado de los intereses y término constante . . . . .                        | 291   |
| 22. <i>Amortización mediante una renta de término variable.</i> Renta en progresión aritmética . . . . .                | 294   |
| 23. Ejemplo. . . . .  | 296   |
| 24. Cotas que limitan los valores de $R$ y $\rho$ . . . . .   | 297   |
| 25. Renta en progresión geométrica . . . . .  | 304   |
| 26. Ejemplo. . . . .  | 306   |
| 27. Cotas que limitan los valores de $R$ y $q$ . . . . .  | 306   |
| 28. Suma de algunas progresiones notables . . . . .   | 308   |
| 29. Valoración prospectiva y retrospectiva . . . . .  | 311   |
| 30. Usufructo y nuda propiedad de rentas en progresión aritmética. . . . .  | 312   |
| 31. Ejemplo. . . . .  | 314   |
| 32. Usufructo y nuda propiedad de rentas en progresión geométrica . . . . .   | 316   |
| 33. Ejemplo. . . . .  | 318   |
| 34. Amortización con cuota constante . . . . .  | 319   |
| 35. Ejemplo. . . . .  | 321   |
| 36. Amortización igual a una fracción del capital restante . . . . .  | 322   |

|   | Págs. |
|---|-------|
| 37. Tiempo necesario para que el capital pendiente de amortización sea igual a una fracción del primitivo . . . . . | 325   |
| 38. Ejemplo . . . . .   | 326   |

#### CAP. XXIV.—EMISIÓN DE VALORES MOBILIARIOS

|  |     |
|--|-----|
| 1. Definiciones y sus clases . . . . .                                     | 329 |
| 2. Acciones; clasificaciones . . . . .                                     | 329 |
| 3. Cotización y negociación . . . . .                                      | 331 |
| 4. Precios de las nuevas acciones en casos de aumento de capital . . . . . | 331 |
| 5. Valor teórico del derecho de suscripción . . . . .                      | 333 |
| 6. Obligaciones; cupones . . . . .   | 335 |
| 7. Emisión . . . . .   | 336 |
| 8. Vida y edad de un título . . . . .                                      | 337 |
| 9. Amortización; por sorteo y por compra en Bolsa . . . . .                | 337 |
| 10. Impuestos . . . . .  | 338 |

#### CAP. XXV.—EMPRÉSTITOS; SU ESTUDIO DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA ENTIDAD EMISORA

|  |     |
|--|-----|
| 1. <i>Amortización con pagos periódicos constantes</i> . . . . .   | 339 |
| 2. Cuotas de interés y de amortización; títulos amortizados en cada sorteo . . . . .   | 340 |
| 3. Valores del capital pendiente y del amortizado; títulos vivos y títulos amortizados . . . . .   | 340 |
| 4. Cuadro de amortización normal . . . . .   | 341 |
| 5. Ejemplo . . . . .   | 343 |
| 6. Residuos; sus diversas interpretaciones . . . . .   | 345 |
| 7. Residuos negativos . . . . .  | 350 |
| 8. Caja de amortización . . . . .  | 351 |
| 9. <i>Amortización con pagos periódicos variables</i> . En progresión aritmética . . . . .   | 354 |
| 10. Ejemplo . . . . .  | 356 |
| 11. En progresión geométrica . . . . .   | 357 |
| 12. Ejemplo . . . . .  | 359 |
| 13. Otros tipos de amortizaciones con cuotas variables en los empréstitos. Empréstitos con amortización constante; con amortizaciones múltiplos de la primera o de la última . . . . . | 360 |
| 14. Gastos en la emisión de un empréstito; tanto efectivo de emisión . . . . .   | 367 |
| 15. Ejemplo . . . . .  | 370 |
| 16. <i>Distintos tipos especiales de empréstitos</i> . . . . .   | 372 |
| 17. Fraccionamiento del período de interés y de amortización. Ejemplo . . . . .  | 372 |
| 18. Caso particular en que solamente se fracciona en $k$ pagos parciales, el servicio de intereses. Ejemplo . . . . .  | 374 |
| 19. Empréstitos con amortización diferida. Ejemplo . . . . .   | 378 |
| 20. Empréstitos emitidos sobre o bajo la par. Ejemplo . . . . .  | 379 |
| 21. Empréstitos amortizados sobre o bajo la par. Ejemplo . . . . .   | 382 |

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 22. | Tanto efectivo en la emisión a precio distinto de la par. Ejemplo . . . . .   | 387 |
| 23. | Empréstitos que pierden el último cupón al ser amortizados. Caso particular de cupón fraccionado y amortización anual. Ejemplos . . . . .   | 289 |
| 24. | Empréstitos sin interés con precio de reembolso variable . . . . .  | 395 |
| 25. | Empréstitos con interés con precio de reembolso variable . . . . .  | 400 |
| 26. | Empréstitos amortizables con lotes, constantes y variables . . . . .  | 402 |
| 27. | Otros tipos de amortización de empréstitos; obligaciones seriadas, cuotas de amortización variables, interés progresivo, bonos acumulativos, "Instalment Bonds", entidades de préstamo y edificación, cédulas hipotecarias. . . . . | 410 |
| 28. | Amortización por compra en Bolsa . . . . .  | 413 |
| 29. | Conversión y transformación de empréstitos. Ejemplos . . . . .  | 413 |

CAP. XXVI.—EMPRÉSTITOS; SU ESTUDIO DESDE EL PUNTO DE VISTA DEL OBLIGACIONISTA

|     |   |     |
|-----|---|-----|
| 1.  | Generalidades . . . . .   | 417 |
| 2.  | Probabilidad en el origen de amortización en un sorteo determinado, antes o después del mismo . . . . . | 417 |
| 3.  | Probabilidad al final del período $q - 1$ de amortización y de supervivencia . . . . .                  | 421 |
| 4.  | Vida media, vida probable y vida matemática . . . . .   | 424 |
| 5.  | Ejemplo. . . . .  | 429 |
| 6.  | Nuda propiedad, usufructo y valor de una obligación en los diferentes momentos de su vida . . . . .     | 431 |
| 7.  | Valor del usufructo en función de la nuda propiedad . . . . .   | 435 |
| 8.  | Valor de un título . . . . .  | 436 |
| 9.  | Variación del valor en el transcurso de un período . . . . .  | 438 |
| 10. | Ejemplo. . . . .  | 441 |
| 11. | Nuda propiedad y usufructo en otros tipos de empréstitos; cupón fraccionado. . . . .                    | 442 |
| 12. | Fórmula de ACHARD . . . . .   | 444 |
| 13. | Tanto efectivo de rendimiento para el obligacionista . . . . .  | 446 |
| 14. | Medios de cálculo gráfico. . . . .  | 447 |
| 15. | Impuestos a cargo del obligacionista. Fórmula de ACHARD-KAKOWSKY . . . . .                              | 448 |
| 16. | Paridad . . . . .   | 457 |
| 17. | Seguro de amortización. . . . .   | 457 |
|     | APÉNDICE . . . . .  | 461 |