



Facultad de Ciencias Económicas

Bibliotecas

INDICE

1. INTEGRACION .....	1
Función primitiva .....	1
Antiderivada - Integral indefinida .....	3
Ejercicios resueltos .....	3
Ejercicios propuestos .....	4
Tabla de integrales inmediatas .....	6
Ejercicios propuestos .....	7
Integrando de la forma $\frac{k}{x^n}$ .....	9
Ejercicios resueltos y ejercicios propuestos .....	9
Caso en que el integrando es una raíz de índice superior a 2 .....	10
Ejercicios resueltos .....	10
Ejercicios propuestos .....	11
Ejercicios propuestos sobre los distintos casos ya estudiados .....	12
Integrales del tipo $\int n [\varphi(x)]^{n-1} \varphi'(x) dx$ .....	19
Ejercicios resueltos .....	19
Ejercicios propuestos .....	20
Integrales de la forma $\int \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} dx$ .....	25
Ejercicios resueltos .....	25
Ejercicios propuestos .....	26
Integrales de la forma $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$ .....	27
Ejercicios resueltos .....	27
Ejercicios propuestos .....	28
La Integral en Economía .....	29
Hallar la función costo total a partir de la función costo marginal - Ejercicio resuelto .....	29
Ejercicios propuestos .....	30
Hallar la función ingreso medio a partir de la función ingreso marginal - Ejercicio resuelto .....	31
Ejercicios propuestos .....	31
Hallar la función beneficio total .....	32
Ejercicios propuestos .....	32
Propiedades de la integral indefinida .....	33
Métodos de integración .....	
Integración por descomposición .....	35
Ejercicios resueltos .....	35
Ejercicios propuestos .....	36
Método por cambio de variable o sustitución .....	38
Ejemplos .....	38

<i>Método de integración por partes</i> .....	39
Ejercicios resueltos .....	40
Ejercicios propuestos .....	44
<i>Integrales de la forma</i> $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$ .....	48
Primer caso en que $b = 0$ .....	48
Ejercicios resueltos .....	49
Ejercicios propuestos .....	51
Caso general: todos los coeficientes distintos de 0 .....	51
Ejercicios resueltos .....	53
Ejercicios propuestos .....	55
<i>Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples</i> .....	57
1°) Raíces del denominador reales y distintas .....	58
Ejercicios resueltos .....	58
Ejercicios propuestos .....	61
2°) Raíces del denominador reales, pero hay raíces múltiples ..	63
Ejercicios resueltos .....	63
Ejercicios propuestos .....	72
3°) Entre las raíces del denominador figuran raíces que son números complejos conjugados .....	75
Ejercicios resueltos .....	75
Ejercicios propuestos .....	79
4°) En el denominador figuran raíces complejas múltiples .....	83
Ejercicios resueltos .....	83
Ejercicios propuestos .....	84
<i>Integración de funciones trigonométricas</i> .....	85
Primer caso: el integrando es una potencia impar de $\sin x$ , o de $\cos x$ .....	85
Ejercicios resueltos .....	85
Segundo caso: el integrando es una potencia par de $\sin x$ o de $\cos x$ .....	87
Ejercicios resueltos .....	87
Tercer caso: el integrando es el producto $\sin mx \cdot \cos nx$ o de dos $\sin$ o de dos $\cos$ .....	88
Ejercicios resueltos .....	88
Cuarto caso: el integrando es una potencia de $\sin x$ por una potencia de $\cos x$ .....	89
Ejercicios resueltos .....	89
Ejercicios propuestos .....	91
<i>Integración de expresiones racionales de funciones trigonométricas</i> ..	93
Ejercicios resueltos .....	93
Ejercicios propuestos .....	95
<i>Integración de funciones irracionales</i> .....	96
Primer caso: en el integrando figuran dos o más raíces de distinto índice .....	96



Ejercicios resueltos .....	96
Ejercicios propuestos .....	97
Segundo caso: en el integrando figuran raíces cuadradas de polinomios de primer grado .....	99
Ejercicios resueltos .....	99
Ejercicios propuestos .....	101
Tercer caso: en el integrando figuran radicales de la forma $\sqrt[n]{ax + b}$ .....	103
Ejercicio resuelto .....	103
Ejercicios propuestos .....	104
Cuarto caso: en el integrando figuran expresiones de la forma $\sqrt[n]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^m}$ .....	104
Ejercicios resueltos .....	105
Ejercicios propuestos .....	108
Quinto caso: en el integrando figura una raíz cuadrada de la forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ donde $a$ es positivo .....	109
Ejercicios resueltos .....	110
Ejercicios propuestos .....	113
Sexto caso: en el integrando figura una raíz cuadrada de la forma $\sqrt{-ax^2 + bx + c}$ donde el término de segundo grado es negativo .....	115
Ejercicios resueltos .....	116
Ejercicios propuestos .....	117
Otros procesos de resolución de los ejercicios ya considerados ..	118
Ejercicios resueltos .....	118
Ejercicios propuestos .....	120
Resolución mediante sustituciones trigonométricas donde figura $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ con $a > 0$ ó $a < 0$ .....	121
Ejercicios resueltos .....	121
Ejercicios propuestos .....	124
Tabla completa de primitivas .....	126
<b>2. INTEGRAL DEFINIDA .....</b>	<b>135</b>
Definición .....	137
Fórmula de Barrow .....	138
Ejemplos resueltos .....	139
Reseña histórica .....	139
Propiedades de la integral definida .....	140
Observación .....	141
Teorema del valor medio de la integral .....	142
<i>Integrales impropias</i> .....	144
De primera especie $b = +\infty$ .....	144
Ejercicios resueltos .....	145
Ejercicios propuestos .....	146
Si $a = -\infty$ .....	147

Ejercicios resueltos	147
Cuando $a$ es $-\infty$ y $b$ es $+\infty$	147
De segunda especie: la discontinuidad es en el extremo $b$	147
La discontinuidad es en el extremo $b$ - Ejercicio resuelto	148
La discontinuidad es en el extremo $a$ - Ejercicio resuelto	149
La discontinuidad es un punto interior del intervalo	150
<i>Aplicaciones geométricas de la integral definida</i>	150
Cálculo del área comprendida entre la curva gráfica de la función $f(x)$ , el eje $x$ y las rectas $x = a$ , $x = b$	150
Cálculo de áreas mediante la integral definida	150
Ejercicios resueltos	153
Cuando la curva está en el semiplano inferior con respecto al eje $x$	155
Ejercicios resueltos	155
Cuando la curva corta al eje $x$ en distintos puntos	157
Ejercicios propuestos	157
<i>El problema del área y la integral definida</i>	163
Cambio de los extremos de integración que corresponden a un cambio de la variable en el integrando	165
Ejemplos de aplicación	165
Ejercicios propuestos	170
Área de una zona comprendida entre dos curvas	172
Ejercicios resueltos	173
Resolución del ejercicio cuando se integra con respecto al eje $y$	177
Cálculo del área de una zona limitada por 3 ó más curvas	178
Ejercicios propuestos	179
<i>Cálculo de la longitud de un arco de curva mediante integrales</i>	185
Ejemplos resueltos	187
Ejercicios propuestos	192
Caso en que la función está expresada paramétricamente	196
Ejercicios resueltos	197
Ejercicio propuesto	198
<i>Volúmenes de cuerpos de revolución</i>	200
Determinación de volúmenes de cuerpos de revolución mediante integrales	201
Ejercicios resueltos	204
Caso en que el arco atraviesa el eje - Nota	206
Caso en que la superficie que genera el volumen está limitada por una curva cerrada que no atraviesa el eje alrededor del cual gira	206
Ejercicio resuelto	207
Ejercicios propuestos	210
<i>Volumen del cuerpo de revolución, cuando la figura gira alrededor del eje <math>y</math></i>	218
Ejercicios resueltos	218
Ejercicios propuestos	220



<i>Volúmenes de cuerpos generados por una figura que gira alrededor de ejes paralelos a los ejes coordenados</i> .....	224
Ejercicio resuelto .....	224
Ejercicios propuestos .....	225
<i>Áreas de superficies de revolución</i> .....	226
Ejercicio resuelto .....	228
Ejercicios propuestos .....	230
Casos en que la curva está dada paramétricamente .....	232
Ejercicios resueltos .....	232
<i>Áreas de superficies de revolución cuando el arco gira alrededor del eje y</i> .....	233
Ejercicio resuelto .....	233
Caso en que conviene aplicar la fórmula $2\pi \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}$ .....	234
Ejercicios propuestos .....	235
<i>Área de la superficie de revolución generada por el contorno de una figura comprendida entre 2 curvas, cuando gira alrededor de uno de los ejes coordenados</i> .....	237
Ejercicios propuestos .....	237
<i>Aplicaciones de la integral definida a la Economía</i> .....	238
Cálculo del ingreso total - Ejercicio resuelto .....	238
Ejercicios propuestos .....	239
Cálculo del costo total - Ejercicio resuelto .....	240
Ejercicios propuestos .....	241
<i>Aplicaciones del cálculo integral a la Física</i> .....	241
Momento estático o de primer orden de un punto material .....	242
<i>Momento estático y centro de gravedad de un arco de curva material</i> .....	242
Coordenadas del centro de gravedad .....	243
Ejercicio resuelto .....	244
<i>Momento estático y centro de gravedad de figuras planas materiales</i> .....	246
Coordenadas del centro de gravedad .....	247
Ejercicios resueltos .....	248
Teoremas de Guldin .....	251
Primer Teorema de Guldin .....	251
Ejercicios resueltos .....	251
Segundo Teorema de Guldin .....	253
Ejercicios resueltos .....	253
<i>Momentos estáticos y centro de gravedad de cuerpos materiales de revolución</i> .....	254
Coordenadas del centro de gravedad .....	256
Ejercicio resuelto .....	256
Ejercicios propuestos .....	257
<i>Momentos de inercia o de segundo orden</i> .....	259
Momento polar .....	259

Ejercicios resueltos .....	260
Teorema de Steiner .....	263
Ejercicios propuestos .....	263
<b>3. SERIES NUMERICAS .....</b>	<b>265</b>
<i>Sucesiones</i> .....	265
Sucesión numérica acotada .....	266
Sucesión numérica convergente .....	267
<i>Series numéricas</i> .....	268
Definición .....	269
Término general .....	270
Ejercicios propuestos .....	270
<i>Clasificación de series</i> .....	271
Series convergentes, divergentes y oscilantes .....	271
— Propiedades .....	273
Convergencia absoluta .....	276
Condición necesaria para la convergencia de una serie numérica .....	278
Serie armónica .....	279
Ejercicios propuestos .....	282
<i>Criterios de convergencia</i> .....	282
<i>Series geométricas - Definición y ejemplos</i> .....	282
Clasificación de series geométricas según el valor absoluto de la razón .....	283
Ejercicios resueltos .....	285
Ejercicios propuestos .....	286
<i>Series de términos positivos</i> .....	287
<i>Criterios de comparación para las series de términos positivos</i> .....	288
<i>Criterio de comparación o de Gauss</i> .....	288
Ejercicios resueltos .....	290
Ejercicios propuestos .....	292
Consecuencias del criterio de comparación .....	293
<i>Criterio del cociente o de D'Alambert</i> .....	295
Nota histórica de D'Alambert, Juan Le Rond .....	295
Teorema correspondiente al criterio del cociente .....	295
Enunciado del criterio .....	297
Expresión en símbolos y justificación del criterio .....	298
Ejercicios resueltos .....	299
Ejercicios propuestos .....	300
<i>Criterio de Raabe</i> .....	303
Teorema correspondiente .....	303
Expresión simbólica y justificación del criterio .....	306



Ejercicios resueltos . . . . .	307
Ejercicios propuestos . . . . .	310
<i>Criterio de la raíz o de Cauchy</i> . . . . .	311
Ejercicios resueltos . . . . .	312
Ejercicios propuestos . . . . .	312
<i>Criterio integral</i> . . . . .	314
Ejemplo: Clasificación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ . . . . .	315
Ejercicios propuestos . . . . .	316
<i>Series alternadas</i> . . . . .	317
Criterio de convergencia de Leibniz . . . . .	317
Ejercicio resuelto . . . . .	319
Ejercicios propuestos . . . . .	320
Ejercicios propuestos de series absolutamente convergentes . . . . .	321
<b>4. SERIES DE POTENCIAS O ENTERAS</b> . . . . .	<b>323</b>
Series de funciones - Ejemplos . . . . .	323
<i>Series de potencias</i> . . . . .	324
Observaciones . . . . .	325
Teorema de Abel . . . . .	325
Corolario . . . . .	327
Radio de convergencia . . . . .	327
Determinación del radio de convergencia . . . . .	328
Ejercicios resueltos . . . . .	329
Ejercicios propuestos . . . . .	331
<i>Desarrollo de funciones en serie de potencias - Serie de Mac Laurin</i> . . . . .	332
Ejercicios resueltos . . . . .	335
Ejercicios propuestos . . . . .	338
<b>5. ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS</b> . . . . .	<b>343</b>
Ejemplos - Consideraciones generales . . . . .	343
<i>Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables</i> . . . . .	345
Ejercicios resueltos . . . . .	345
Ejercicios propuestos . . . . .	347
<i>Algunas ecuaciones sencillas de segundo orden</i> . . . . .	348
Ejercicio resuelto . . . . .	348
Ejercicios propuestos . . . . .	349
<i>Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden</i> . . . . .	349
Primer caso . . . . .	349
Ejercicio resuelto . . . . .	350

INDICE

Segundo caso . . . . .	350
Ejercicios resueltos . . . . .	352
Ejercicios propuestos . . . . .	354
<i>Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas con</i> <i>coeficientes constantes . . . . .</i>	355
Ejemplo . . . . .	355
Ecuación característica . . . . .	355
Resolución:	
Primer caso: las raíces de la ecuación característica son reales y distintas . . . . .	356
Ejercicio resuelto . . . . .	356
Segundo caso: las raíces de la ecuación característica son reales e iguales . . . . .	357
Ejercicio resuelto . . . . .	357
Problemas en que se impone el valor de las constantes . . . . .	358
Tercer caso: las raíces de la ecuación característica son números complejos conjugados . . . . .	359
Ejercicios propuestos . . . . .	359