



INDICE

PREFACIO

CAPITULO I. NUMERO. VARIABLE. FUNCION

| | |
|--|----|
| § 1. Números reales. Representación de números reales por medio de puntos en el eje numérico | 7 |
| § 2. Valor absoluto del número real | 9 |
| § 3. Magnitudes variables y constantes | 10 |
| § 4. Campo de variación de la magnitud variable | 11 |
| § 5. Variable ordenada. Variables crecientes y decrecientes. Variable acotada | 13 |
| § 6. Función | 14 |
| § 7. Formas de expresión de funciones | 15 |
| § 8. Funciones elementales fundamentales. Funciones elementales | 17 |
| § 9. Funciones algebraicas | 22 |
| § 10. Sistema de coordenadas polares | 24 |
| <i>Ejercicios para el capítulo I</i> | |

CAPITULO II. LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

| | |
|--|----|
| § 1. Límite de la magnitud variable. Variable infinitamente grande | 28 |
| § 2. Límite de la función | 31 |
| § 3. Función que tiende al infinito. Funciones acotadas | 34 |
| § 4. Infinitesimales y sus principales propiedades | 38 |
| § 5. Teoremas fundamentales sobre límites | 42 |
| § 6. Límite de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$, cuando $x \rightarrow 0$ | 46 |
| § 7. Número e | 48 |
| § 8. Logaritmos naturales | 53 |

| | |
|--|----|
| § 9. Continuidad de las funciones | 54 |
| § 10. Algunas propiedades de las funciones continuas | 59 |
| § 11. Comparación de las magnitudes infinitesimales | 62 |
| <i>Ejercicios para el capítulo II</i> | |

CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

| | |
|--|-----|
| § 1. Velocidad del movimiento | 68 |
| § 2. Definición de la derivada | 70 |
| § 3. Interpretación geométrica de la derivada | 72 |
| § 4. Derivación de las funciones | 74 |
| § 5. Derivadas de las funciones elementales. Derivada de la función $y = x^n$, siendo n entero y positivo | 76 |
| § 6. Derivadas de las funciones $y = \text{sen } x$; $y = \text{cos } x$ | 78 |
| § 7. Derivadas de una magnitud constante, del producto de una magnitud constante por una función, de una suma, producto y cociente | 79 |
| § 8. Derivada de la función logarítmica | 84 |
| § 9. Derivada de la función compuesta | 85 |
| § 10. Derivadas de las funciones $y = \text{tg } x$, $y = \text{cotg } x$, $y = \ln x $ | 88 |
| § 11. Función implícita y su derivación | 90 |
| § 12. Derivadas de la función potencial con exponente real cualquiera, de la función exponencial y de la función exponencial compuesta | 92 |
| § 13. Función inversa y su derivación | 94 |
| § 14. Funciones trigonométricas inversas y su derivación | 98 |
| § 15. Tabla de las fórmulas fundamentales para la derivación | 103 |
| § 16. Representación paramétrica de función | 104 |
| § 17. Ecuaciones paramétricas de algunas curvas | 106 |
| § 18. Derivada de la función dada paraméricamente | 109 |
| § 19. Funciones hiperbólicas | 111 |
| § 20. Diferencial | 114 |
| § 21. Significado geométrico de la diferencial | 118 |
| § 22. Derivadas de diversos órdenes | 119 |
| § 23. Diferenciales de diversos órdenes | 122 |
| § 24. Derivadas de diversos órdenes de funciones implícitas y de funciones representadas paraméricamente | 123 |
| § 25. Interpretación mecánica de la segunda derivada | 126 |
| § 26. Ecuaciones de la línea tangente y de la normal. Longitudes de la línea subtangente y de la subnormal | 127 |
| § 27. Interpretación geométrica de la derivada del radio vector respecto al ángulo polar | 130 |
| <i>Ejercicios para el capítulo III</i> | |

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. Teorema sobre las raíces de la derivada (Teorema de Rolle) 141

§ 2. Teorema sobre los incrementos finitos (Teorema de Lagrange) 143

§ 3. Teorema sobre la razón de los incrementos de dos funciones (Teorema de Cauchy) 145

§ 4. Límite de la razón de dos infinitesimales («Cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ ») 146

§ 5. Límite de la razón de dos magnitudes infinitamente grandes («Cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ ») 149

§ 6. Fórmula de Taylor 155

§ 7. Desarrollo de las funciones e^x , $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ por la fórmula de Taylor 159

Ejercicios para el capítulo IV

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. Generalidades 166

§ 2. Crecimiento y decrecimiento de una función. 167

§ 3. Máximo y mínimo de las funciones 169

§ 4. Análisis del máximo y mínimo de una función derivable mediante la primera derivada 175

§ 5. Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada 178

§ 6. Valores máximo y mínimo de una función en un segmento 182

§ 7. Aplicación de la teoría de máximos y mínimos de las funciones a la solución de problemas 183

§ 8. Análisis de los valores máximo y mínimo de una función mediante la fórmula de Taylor 185

§ 9. Convexidad y concavidad de la curva. Puntos de inflexión 188

§ 10. Asíntotas 194

§ 11. Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficas 199

§ 12. Análisis de las curvas dadas en forma paramétrica 204

Ejercicios para el capítulo V

CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

| | |
|--|-----|
| § 1. Longitud del arco y su derivada | 214 |
| § 2. Curvatura | 216 |
| § 3. Cálculo de la curvatura | 218 |
| § 4. Cálculo de la curvatura de una curva dada en forma paramétrica | 221 |
| § 5. Cálculo de la curvatura de una curva dada en coordenadas polares | 222 |
| § 6. Radio y círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta y evolvente. | 224 |
| § 7. Propiedades de la evoluta. | 229 |
| § 8. Cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación. | 233 |
| <i>Ejercicios para el capítulo VI</i> | |

CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

| | |
|--|-----|
| § 1. Números complejos. Generalidades | 241 |
| § 2. Operaciones fundamentales con números complejos | 243 |
| § 3. Elevación a potencia y extracción de la raíz del número complejo | 246 |
| § 4. Función exponencial con exponente complejo y sus propiedades | 249 |
| § 5. Fórmula de Euler. Forma exponencial del número complejo | 252 |
| § 6. Desarrollo del polinomio en factores | 253 |
| § 7. Raíces múltiples del polinomio | 257 |
| § 8. Factorización de un polinomio con raíces complejas | 258 |
| § 9. Interpolación. Fórmula de la interpolación de Lagrange | 259 |
| § 10. Fórmula de la interpolación de Newton | 262 |
| § 11. Derivación numérica | 264 |
| § 12. Óptima aproximación de las funciones por medio de polinomios. Teoría de Chébishev. | 265 |
| <i>Ejercicios para el capítulo VII</i> | |

CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

| | |
|--|-----|
| § 1. Definición de las funciones de varias variables | 268 |
| § 2. Representación geométrica de una función de dos variables | 271 |

| | |
|--|-----|
| § 3. Incremento parcial y total de la función | 272 |
| § 4. Continuidad de la función de varias variables | 274 |
| § 5. Derivadas parciales de la función de varias variables | 277 |
| § 6. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables | 279 |
| § 7. Incremento total y diferencial total | 280 |
| § 8. Aplicación de la diferencial total para cálculos aproximados | 284 |
| § 9. Utilización de la diferencial para evaluar el error de cálculo | 286 |
| § 10. Derivada de una función compuesta. Derivada total | 290 |
| § 11. Derivada de una función definida implícitamente | 292 |
| § 12. Derivadas parciales de diferentes órdenes | 296 |
| § 13. Superficies de nivel | 300 |
| § 14. Derivada siguiendo una dirección | 301 |
| § 15. Gradiente | 304 |
| § 16. Fórmula de Taylor para una función de dos variables | 307 |
| § 17. Máximo y mínimo de una función de varias variables | 309 |
| § 18. Máximo y mínimo de la función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos condicionados) | 318 |
| § 19. Obtención de una función a base de datos experimentales según el método de cuadrados mínimos | 323 |
| § 20. Puntos singulares de una curva | 328 |
| <i>Ejercicios para el capítulo VIII</i> | |

CAPITULO IX. APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

| | |
|--|-----|
| § 1. Ecuaciones de la curva en el espacio | 337 |
| § 2. Límite y derivada de una función vectorial de un argumento escalar. Ecuación de la tangente a una curva. Ecuación del plano normal | 340 |
| § 3. Reglas de derivación de los vectores (funciones vectoriales) | 347 |
| § 4. Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de la curva. Normal principal. Velocidad y aceleración del punto durante el movimiento curvilíneo | 350 |
| § 5. Plano osculador. Binormal. Torsión | 360 |
| § 6. Plano tangente y normal a una superficie | 365 |
| <i>Ejercicios para el capítulo IX</i> | |

CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

| | |
|---|-----|
| § 1. Función primitiva e integral indefinida | 372 |
| § 2. Tabla de integrales | 375 |
| § 3. Algunas propiedades de la integral indefinida | 377 |
| § 4. Integración por cambio de variable o por sustitución | 379 |
| § 5. Integrales de ciertas funciones que contienen un trinomio cuadrado | 381 |
| § 6. Integración por partes | 385 |
| § 7. Fracciones racionales. Fracciones racionales elementales y su integración | 388 |
| § 8. Descomposición de la fracción racional en fracciones simples | 392 |
| § 9. Integración de las fracciones racionales | 397 |
| § 10. Método de Ostrogradski | 400 |
| § 11. Integrales de las funciones irracionales | 403 |
| § 12. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ | 405 |
| § 13. Integración de los binomios diferenciales | 408 |
| § 14. Integración de ciertas clases de funciones trigonométricas | 411 |
| § 15. Integración de ciertas funciones irracionales con ayuda de sustituciones trigonométricas. | 416 |
| § 16. Funciones cuyas integrales no pueden expresarse mediante las funciones elementales | 418 |
| <i>Ejercicios para el capítulo X</i> | |

CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

| | |
|---|-----|
| § 1. Planteo del problema. Sumas integrales inferior y superior | 428 |
| § 2. Integral definida | 430 |
| § 3. Propiedades fundamentales de la integral definida | 437 |
| § 4. Cálculo de la integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz | 441 |
| § 5. Sustitución de variable en una integral definida | 445 |
| § 6. Integración por partes | 447 |
| § 7. Integrales impropias | 450 |
| § 8. Cálculo aproximado de las integrales definidas | 458 |
| § 9. Fórmula de Chébishev | 464 |
| § 10. Integrales dependientes de un parámetro | 469 |
| § 11. Integración de una función compleja de una variable real. | 473 |

Ejercicios para el capítulo XI

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS
Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

| | |
|---|-----|
| § 1. Cálculos de áreas en coordenadas rectangulares | 478 |
| § 2. Area de un sector curvilíneo en coordenadas polares | 481 |
| § 3. Longitud de un arco de curva | 483 |
| § 4. Cálculo del volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas | 489 |
| § 5. Volumen de un cuerpo de revolución | 491 |
| § 6. Area de un cuerpo de revolución | 492 |
| § 7. Cálculo del trabajo con ayuda de la integral definida | 494 |
| § 8. Coordenadas del centro de gravedad | 496 |
| § 9. Cálculo del momento de inercia de una línea, de un círculo y de un cilindro mediante la integral definida | 500 |
| <i>Ejercicios para el capítulo XII.</i> | 503 |
| <i>Indice alfabético de materias</i> | 509 |
| <i>Indice</i> | 513 |