



1. INTEGRACION	1
• Función primitiva	1
• Antiderivada - Integral indefinida	3
Ejercicios resueltos	3
Ejercicios propuestos	4
• Tabla de integrales inmediatas	6
Ejercicios propuestos	7
Integrando de la forma $\frac{k}{x^n}$	9
Ejercicios resueltos y ejercicios propuestos	9
Caso en que el integrando es una raíz de índice superior a 2	10
Ejercicios resueltos	10
Ejercicios propuestos	11
Ejercicios propuestos sobre los distintos casos ya estudiados	12
Integrales del tipo $\int n [\varphi(x)]^{n-1} \varphi'(x) dx$	19
Ejercicios resueltos	19
Ejercicios propuestos	20
Integrales de la forma $\int \frac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x)}} dx$	25
Ejercicios resueltos	25
Ejercicios propuestos	26
Integrales de la forma $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} dx$	27
Ejercicios resueltos	27
Ejercicios propuestos	28
La Integral en Economía	29
Hallar la función costo total a partir de la función costo marginal - Ejercicio resuelto	29
Ejercicios propuestos	30
Hallar la función ingreso medio a partir de la función ingreso marginal - Ejercicio resuelto	31
Ejercicios propuestos	31
Hallar la función beneficio total	32
Ejercicios propuestos	32
Propiedades de la integral indefinida	33
Métodos de integración	
• Integración por descomposición	35
Ejercicios resueltos	35
Ejercicios propuestos	36
• Método por cambio de variable o sustitución	38
Ejemplos	38

Método de integración por partes	39
Ejercicios resueltos	40
Ejercicios propuestos	44
✓ <i>Integrales de la forma</i> $\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx$	48
Primer caso en que $b = 0$	48
Ejercicios resueltos	49
Ejercicios propuestos	51
Caso general: todos los coeficientes distintos de 0	51
Ejercicios resueltos	53
Ejercicios propuestos	55
✓ <i>Integración de funciones racionales por descomposición en fracciones simples</i>	57
1°) Raíces del denominador reales y distintas	58
Ejercicios resueltos	58
Ejercicios propuestos	61
2°) Raíces del denominador reales, pero hay raíces múltiples ..	63
Ejercicios resueltos	63
Ejercicios propuestos	72
3°) Entre las raíces del denominador figuran raíces que son números complejos conjugados	75
Ejercicios resueltos	75
Ejercicios propuestos	79
4°) En el denominador figuran raíces complejas múltiples	83
Ejercicios resueltos	83
Ejercicios propuestos	84
⊙ <i>Integración de funciones trigonométricas</i>	85
Primer caso: el integrando es una potencia impar de $\operatorname{sen} x$, o de $\operatorname{cos} x$	85
Ejercicios resueltos	85
Segundo caso: el integrando es una potencia par de $\operatorname{sen} x$ o de $\operatorname{cos} x$	87
Ejercicios resueltos	87
Tercer caso: el integrando es el producto $\operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{cos} nx$ o de dos sen o de dos cos	88
Ejercicios resueltos	88
Cuarto caso: el integrando es una potencia de $\operatorname{sen} x$ por una potencia de $\operatorname{cos} x$	89
Ejercicios resueltos	89
Ejercicios propuestos	91
⊙ <i>Integración de expresiones racionales de funciones trigonométricas</i> ..	93
Ejercicios resueltos	93
Ejercicios propuestos	95
✓ <i>Integración de funciones irracionales</i>	96
Primer caso: en el integrando figuran dos o más raíces de distinto índice	96

Ejercicios resueltos	96
Ejercicios propuestos	97
Segundo caso: en el integrando figuran raíces cuadradas de polinomios de primer grado	99
Ejercicios resueltos	99
Ejercicios propuestos	101
Tercer caso: en el integrando figuran radicales de la forma $\sqrt[n]{ax + b}$	103
Ejercicio resuelto	103
Ejercicios propuestos	104
Cuarto caso: en el integrando figuran expresiones de la forma $\sqrt[n]{\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right)^m}$	104
Ejercicios resueltos	105
Ejercicios propuestos	108
Quinto caso: en el integrando figura una raíz cuadrada de la forma $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ donde a es positivo	109
Ejercicios resueltos	110
Ejercicios propuestos	113
Sexto caso: en el integrando figura una raíz cuadrada de la forma $\sqrt{-ax^2 + bx + c}$ donde el término de segundo grado es negativo	115
Ejercicios resueltos	116
Ejercicios propuestos	117
Otros procesos de resolución de los ejercicios ya considerados ..	118
Ejercicios resueltos	118
Ejercicios propuestos	120
Resolución mediante sustituciones trigonométricas donde figura $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ con $a > 0$ ó $a < 0$	121
Ejercicios resueltos	121
Ejercicios propuestos	124
Tabla completa de primitivas	126
2. INTEGRAL DEFINIDA	135
Definición	137
• Fórmula de Barrow	138
Ejemplos resueltos	139
Reseña histórica	139
Propiedades de la integral definida	140
Observación	141
• Teorema del valor medio de la integral	142
Integrales impropias	144
De primera especie $b = +\infty$	144
Ejercicios resueltos	145
Ejercicios propuestos	146
Si $a = -\infty$	147

Ejercicios resueltos	147
Cuando a es $-\infty$ y b es $+\infty$	147
De segunda especie: la discontinuidad es en el extremo b	147
La discontinuidad es en el extremo b - Ejercicio resuelto	148
La discontinuidad es en el extremo a - Ejercicio resuelto	149
La discontinuidad es un punto interior del intervalo	150
Aplicaciones geométricas de la integral definida	150
Cálculo del área comprendida entre la curva gráfica de la función $f(x)$, el eje x y las rectas $x = a$, $x = b$	150
Cálculo de áreas mediante la integral definida	150
Ejercicios resueltos	153
Cuando la curva está en el semiplano inferior con respecto al eje x	155
Ejercicios resueltos	155
Cuando la curva corta al eje x en distintos puntos	157
Ejercicios propuestos	157
El problema del área y la integral definida	163
Cambio de los extremos de integración que corresponden a un cambio de la variable en el integrando	165
Ejemplos de aplicación	165
Ejercicios propuestos	170
Área de una zona comprendida entre dos curvas	172
Ejercicios resueltos	173
Resolución del ejercicio cuando se integra con respecto al eje y ..	177
Cálculo del área de una zona limitada por 3 ó más curvas	178
Ejercicios propuestos	179
Cálculo de la longitud de un arco de curva mediante integrales	185
Ejemplos resueltos	187
Ejercicios propuestos	192
Caso en que la función está expresada paramétricamente	196
Ejercicios resueltos	197
Ejercicio propuesto	198
Volúmenes de cuerpos de revolución	200
Determinación de volúmenes de cuerpos de revolución mediante integrales	201
Ejercicios resueltos	204
Caso en que el arco atraviesa el eje - Nota	206
Caso en que la superficie que genera el volumen está limitada por una curva cerrada que no atraviesa el eje alrededor del cual gira	206
Ejercicio resuelto	207
Ejercicios propuestos	210
Volumen del cuerpo de revolución, cuando la figura gira alrededor del eje y	218
Ejercicios resueltos	218
Ejercicios propuestos	220

<i>Volúmenes de cuerpos generados por una figura que gira alrededor de ejes paralelos a los ejes coordenados</i>	224
Ejercicio resuelto	224
Ejercicios propuestos	225
<i>Áreas de superficies de revolución</i>	226
Ejercicio resuelto	228
Ejercicios propuestos	230
Casos en que la curva está dada paramétricamente	232
Ejercicios resueltos	232
<i>Áreas de superficies de revolución cuando el arco gira alrededor del eje y</i>	233
Ejercicio resuelto	233
Caso en que conviene aplicar la fórmula $2\pi \int_a^b x\sqrt{1+y'^2}$	234
Ejercicios propuestos	235
<i>Área de la superficie de revolución generada por el contorno de una figura comprendida entre 2 curvas, cuando gira alrededor de uno de los ejes coordenados</i>	237
Ejercicios propuestos	237
<i>Aplicaciones de la integral definida a la Economía</i>	238
Cálculo del ingreso total - Ejercicio resuelto	238
Ejercicios propuestos	239
Cálculo del costo total - Ejercicio resuelto	240
Ejercicios propuestos	241
<i>Aplicaciones del cálculo integral a la Física</i>	241
Momento estático o de primer orden de un punto material	242
<i>Momento estático y centro de gravedad de un arco de curva material</i>	242
Coordenadas del centro de gravedad	243
Ejercicio resuelto	244
<i>Momento estático y centro de gravedad de figuras planas materiales</i>	246
Coordenadas del centro de gravedad	247
Ejercicios resueltos	248
Teoremas de Guldin	251
Primer Teorema de Guldin	251
Ejercicios resueltos	251
Segundo Teorema de Guldin	253
Ejercicios resueltos	253
<i>Momentos estáticos y centro de gravedad de cuerpos materiales de revolución</i>	254
Coordenadas del centro de gravedad	256
Ejercicio resuelto	256
Ejercicios propuestos	257
<i>Momentos de inercia o de segundo orden</i>	259
Momento polar	259

Ejercicios resueltos	260
Teorema de Steiner	263
Ejercicios propuestos	263
3. SERIES NUMERICAS	265
<i>Sucesiones</i>	265
Sucesión numérica acotada	266
Sucesión numérica convergente	267
<i>Series numéricas</i>	268
Definición	269
Término general	270
Ejercicios propuestos	270
<i>Clasificación de series</i>	271
Series convergentes, divergentes y oscilantes	271
Propiedades	273
Convergencia absoluta	276
Condición necesaria para la convergencia de una serie numérica .	278
Serie armónica	279
Ejercicios propuestos	282
<i>Criterios de convergencia</i>	282
<i>Series geométricas - Definición y ejemplos</i>	282
Clasificación de series geométricas según el valor absoluto de la razón	283
Ejercicios resueltos	285
Ejercicios propuestos	286
<i>Series de términos positivos</i>	287
<i>Criterios de comparación para las series de términos positivos</i>	288
<i>Criterio de comparación o de Gauss</i>	288
Ejercicios resueltos	290
Ejercicios propuestos	292
Consecuencias del criterio de comparación	293
<i>Criterio del cociente o de D'Alambert</i>	295
Nota histórica de D'Alambert, Juan Le Rond	295
Teorema correspondiente al criterio del cociente	295
Enunciado del criterio	297
Expresión en símbolos y justificación del criterio	298
Ejercicios resueltos	299
Ejercicios propuestos	300
<i>Criterio de Raabe</i>	303
Teorema correspondiente	303
Expresión simbólica y justificación del criterio	306

Ejercicios resueltos	307
Ejercicios propuestos	310
<i>Criterio de la raíz o de Cauchy</i>	311
Ejercicios resueltos	312
Ejercicios propuestos	312
<i>Criterio integral</i>	314
Ejemplo: Clasificación de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$	315
Ejercicios propuestos	316
<i>Series alternadas</i>	317
Criterio de convergencia de Leibniz	317
Ejercicio resuelto	319
Ejercicios propuestos	320
Ejercicios propuestos de series absolutamente convergentes	321
4. SERIES DE POTENCIAS O ENTERAS	323
Series de funciones - Ejemplos	323
<i>Series de potencias</i>	324
Observaciones	325
Teorema de Abel	325
Corolario	327
Radio de convergencia	327
Determinación del radio de convergencia	328
Ejercicios resueltos	329
Ejercicios propuestos	331
<i>Desarrollo de funciones en serie de potencias - Serie de Mac Laurin</i> .	332
Ejercicios resueltos	335
Ejercicios propuestos	338
5. ALGUNAS ECUACIONES DIFERENCIALES SENCILLAS	343
Ejemplos - Consideraciones generales	343
<i>Ecuaciones diferenciales de primer orden de variables separables</i> ...	345
Ejercicios resueltos	345
Ejercicios propuestos	347
<i>Algunas ecuaciones sencillas de segundo orden</i>	348
Ejercicio resuelto	348
Ejercicios propuestos	349
<i>Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden</i>	349
Primer caso	349
Ejercicio resuelto	350

Segundo caso	350
Ejercicios resueltos	352
Ejercicios propuestos	354
<i>Ecuaciones diferenciales de segundo orden lineales homogéneas con</i>	
<i>coeficientes constantes</i>	355
Ejemplo	355
Ecuación característica	355
Resolución:	
Primer caso: las raíces de la ecuación característica son reales y	
distintas	356
Ejercicio resuelto	356
Segundo caso: las raíces de la ecuación característica son reales	
e iguales	357
Ejercicio resuelto	357
Problemas en que se impone el valor de las constantes	358
Tercer caso: las raíces de la ecuación característica son números	
complejos conjugados	359
Ejercicios propuestos	359