



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS
FACULTAD DE INGENIERIA
CENTRO DE MEDIOS
BIBLIOTECA

ÍNDICE

3198

PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN	Página
PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN	V
	IX

INTRODUCCIÓN

1. Geometría elemental y geometría analítica	1
2-3. Abscisas sobre la recta.....	2
4. Relaciones entre varios segmentos de una recta	3
5. Distancia entre dos puntos expresada mediante sus abscisas.....	4
6. Punto que divide un segmento en una relación prefijada.....	4
7. Transformación de las abscisas.....	5
8. Sistema de coordenadas. Geometría analítica. — Ejercicios.....	5
9. Haz de rectas. Abscisas angulares	9
10. Coordenadas tangentes en el haz de rectas.....	11
11. Nociones sobre el haz de planos. — Ejercicios	13

PRIMERA PARTE

Geometría analítica del plano

CAPÍTULO I

RELACIONES DE POSICIÓN ENTRE PUNTOS Y RECTAS

12. Sistema de coordenadas en el plano.....	15
13. Coordenadas cartesianas	16
14. Punto que divide un segmento en una relación dada.....	17
15. Condiciones de alineación de tres puntos	18
16. Ecuación de una recta	19
17. Posiciones particulares de una recta respecto a los ejes.....	19
18. Recta que pasa por un punto dado.....	21
19. Intersección de dos rectas. Condición de paralelismo	21
20. Haz de rectas	23
21. Nueva forma de la condición para que tres rectas formen un haz.....	24
22. Red de rectas	25
23. Notación abreviada. — Ejercicios	26

CAPÍTULO II

DISTANCIAS, ÁNGULOS, ÁREAS

	Página
24. Proyecciones paralelas de segmentos	28
25. Distancia entre dos puntos	31
26. Relaciones angulares	32
27. Coeficiente angular de una recta	33
28. Ángulo de dos rectas	35
29. Condición de perpendicularidad de dos rectas	36
30. Ecuación normal de una recta	37
31. Distancia de un punto a una recta	39
32. Signo de un área plana	41
33. Expresión del área de un triángulo en función de las coordenadas de los vértices — <i>Ejercicios</i>	42

CAPÍTULO III

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS. PUNTOS Y RECTAS IMAGINARIAS

34. Fórmulas para el pasaje de un sistema cartesiano a un nuevo sistema cartesiano	48
35. Tipo general de fórmulas para la transformación de coordenadas cartesianas	50
36. Movimiento de una figura plana sobre el plano	50
37. Coordenadas polares	51
38. Puntos y rectas imaginarios	52
39. Rectas isótropas. — <i>Ejercicios</i>	54

CAPÍTULO IV

REPRESENTACIÓN ANALÍTICA DE CURVAS PLANAS

40. Ecuación de una curva plana	58
41. Intersecciones de dos curvas	60
42. Estudio de una curva plana partiendo de su ecuación	60
43. Curvas algebraicas: orden de la curva	61
44. Invariabilidad del orden de una curva algebraica en una transformación de coordenadas	62
45. Significado geométrico del orden de una curva	63
46. Simetría de una curva respecto de los ejes o respecto del origen	64
47. Tangente a una curva en un punto. — <i>Ejercicios</i>	64
48. Ecuación de la circunferencia	68
49. Sistemas de curvas	70
50. Concepto general de sistema de coordenadas en el plano	71
51. Lugar de las intersecciones de curvas correspondientes en dos sistemas dados	72
52. Ecuaciones paramétricas de una curva. — <i>Ejercicios</i>	74

CAPÍTULO V

LA CIRCUNFERENCIA Y OTRAS CURVAS PARTICULARES

	Página
53. Circunferencia determinada por tres puntos.....	77
54. Ecuación polar de una circunferencia. Potencia de un punto respecto a una circunferencia.....	77
55. Tangente a una circunferencia en un punto.....	79
56. Intersecciones de una circunferencia con una recta.....	80
57. Intersección de dos circunferencias ; eje radical.....	80
*58. Condición de ortogonalidad de dos circunferencias.....	81
*59. Haz de circunferencias	82
*60. Haces ortogonales de circunferencias.....	83
*61. Centro radical de tres circunferencias. — <i>Ejercicios</i> ,.....	85
62. Formas de las curvas de segundo orden.....	88
63. Algunas generaciones de curvas de segundo orden. — <i>Ejercicios</i>	91
64. La cisoide y el problema de la duplicación del cubo	94
65. La conoide de la recta y la trisección del ángulo.....	97
66. Curva de Cassini	98
67. Sinusoide.....	100
68. Curvas logarítmicas y exponenciales	102
69. Cicloide.....	103
70. Cuadratriz de Dinostrato. — <i>Ejercicios</i>	104

SEGUNDA PARTE

Geometría analítica del espacio

CAPÍTULO I

RELACIONES DE POSICIÓN ENTRE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

71. Sistema cartesiano de coordenadas	111
72. Punto que divide un segmento en una relación dada.....	113
73. Recta determinada por dos puntos.....	113
74. Plano determinado por tres puntos.....	114
75. Ecuación de un plano.....	115
76. Posiciones particulares de un plano respecto a los ejes	116
77. Planos que pasan por un punto dado.....	117
78. Condiciones de paralelismo de dos planos.....	118
79. Haz de planos.....	119
80. Ecuaciones de una recta en el espacio.....	120
81. Paralelismo de dos rectas	121
82. Punto de intersección de tres planos : radiación de planos.....	122
83. Intersección de una recta con un plano ; condición para que una recta sea paralela a un plano, o pertenezca a él.....	123
84. Condición para que cuatro planos, o dos rectas, tengan un punto común.....	125
85. Nueva forma de la condición para que tres planos pertenezcan a un haz, o cuatro planos a una radiación. — <i>Ejercicios</i>	126

CAPÍTULO II

DISTANCIAS, ÁNGULOS, ÁREAS, VOLUMENES

	Página
86. Proyecciones paralelas de segmentos.	128
87. Proyección de un área.	130
88. Distancia entre dos puntos.	131
89. Relaciones angulares.	131
90. Cosenos directores de una recta.	132
91. Ángulo de dos rectas.	134
92. Ecuación normal de un plano.	135
93. Distancia de un punto a un plano.	137
94. Recta y plano perpendiculares.	138
95. Diedro de dos planos; ángulo de una recta con un plano.	138
96. Área de un triángulo.	139
97. Volumen de un tetraedro.	140
98. Mínima distancia entre dos rectas. — Ejercicios.	142

CAPÍTULO III

TRANSFORMACIÓN DE COORDENADAS

99. Transformación de coordenadas cartesianas.	149
100. Coordenadas polares en el espacio. — Ejercicios.	152

CAPÍTULO IV

EXPRESIÓN ANALÍTICA DE SUPERFICIES Y DE LÍNEAS EN EL ESPACIO

101. Ecuaciones de un lugar de puntos.	156
102-103. Ecuación de una superficie.	157
104. Ecuación de una línea en el espacio.	159
105. Intersección de tres superficies.	160
106. Superficies algebraicas: orden de la superficie.	160
107. Significado geométrico del orden de una superficie.	160
108. Ecuación de la esfera. — Ejercicios.	161
109. Ecuaciones paramétricas de una curva.	167
110. Ecuaciones paramétricas de una superficie.	168
111. Ecuaciones de cilindros y conos.	170
112. Superficies de revolución.	172
113. Cuádricas de revolución. — Ejercicios.	173



TERCERA PARTE

Conceptos fundamentales de geometría proyectiva

CAPÍTULO I

ELEMENTOS IMPROPIOS

COORDENADAS HOMOGÉNEAS DE PUNTOS, RECTAS Y PLANOS

	Página
114. Reseña histórica	179
115. Proyección y sección	180
116. Punto en el infinito de una recta	181
117. Movimiento proyectivo sobre una recta ; segmentos proyectivos	182
118. Pares de elementos que se separan	184
119. Recta en el infinito de un plano	184
120. Proyección de una figura plana sobre otro plano	185
121. Plano en el infinito	186
122. Proposiciones fundamentales relativas a las posiciones mutuas de puntos, rectas y planos	187
123. Ley de dualidad	188
124. Ejemplos de proposiciones gráficas	190
125. Formas geométricas fundamentales	191
126. Carácteres proyectivos de una figura : objeto de la geometría proyectiva. — <i>Ejercicios</i>	193
127. Coordenadas cartesianas homogéneas en el plano	199
128. Ecuación homogénea de una recta	202
129. Ecuación homogénea de una curva plana	203
* 130. Coordenadas de una recta en el plano	204
* 131. Coordenadas plückerianas	205
* 132. Ecuación de un punto en coordenadas de rectas	206
* 133. Problemas fundamentales sobre puntos y rectas en coordenadas homogéneas	207
* 134. Ley de dualidad plana	210
* 135. Demostración analítica del teorema de los triángulos homológicos	211
* 136. Envolvente de rectas	212
137. Puntos de contacto de una envolvente	213
138. Coordenadas cartesianas homogéneas en el espacio	214
* 139. Coordenadas de planos. Ecuaciones de un punto	216
* 140. Envolvente de planos. — <i>Ejercicios</i>	218

CAPÍTULO II

RELACIÓN DOBLE DE CUATRO ELEMENTOS

141. Relación simple de tres elementos	220
142. Sobre las relaciones simples de tres elementos en la puntual y en el haz de rectas	221
143. Relación doble de cuatro elementos	221
144. Cómo varía la relación doble de cuatro elementos al variar uno de ellos	224

	Página
145. Relación doble de cuatro elementos dados mediante sus coordenadas o sus ecuaciones.....	225
146. Propiedad de la relación doble de cuatro números.....	227
147. Vinculación entre las distintas relaciones dobles que se pueden formar con cuatro elementos.....	229
148. Grupos armónicos.....	230
149. Construcción de un grupo armónico de puntos por medio del cuadrángulo completo.....	231
150. Construcción de un grupo armónico de rectas mediante el cuadrilátero completo.....	232
151. Relaciones entre las distancias mutuas de cuatro puntos armónicos.....	233
152. Grupos armónicos de rectas con particularidades métricas. — <i>Ejercicios.</i>	234
* 153. Coordenadas proyectivas en formas de primera especie	240
* 154. Expresión de la relación doble de cuatro elementos mediante coordenadas proyectivas. Transformación de coordenadas proyectivas.....	241
* 155. Coordenadas proyectivas homogéneas en las formas de primera especie	243
* 156. Coordenadas proyectivas en el plano puntual	243
* 157. Coordenadas proyectivas homogéneas de puntos	245
* 158. Coordenadas proyectivas en el plano reglado	246
* 159. Coordenadas proyectivas en la radiación de rectas o planos	248
* 160. Transformación de coordenadas proyectivas	248
* 161. Coordenadas proyectivas de puntos y planos en el espacio. — <i>Ejercicios.</i>	251

CAPÍTULO III

PROYECTIVIDAD ENTRE DOS FORMAS DE PRIMERA ESPECIE

162. Concepto general de correspondencia.....	256
163. Ejemplos de correspondencias proyectivas entre dos formas de primera especie.....	257
164-165. Definición de proyectividad entre dos formas de primera especie.....	258
166. Producto de proyectividades.....	259
167. Posiciones particulares de formas proyectivas.....	260
168. Posición perspectiva de formas proyectivas	261
169. Construcción de una proyectividad entre dos formas de primera especie.....	263
170. Teorema fundamental	265
171. Teorema de Staudt	266
172. Ecuación de la proyectividad	268
173. Propiedades y particularidades métricas de una proyectividad entre puntuales.....	271
174. Elementos unidos de una proyectividad entre formas superpuestas.....	273
175. Ejemplos. Igualdad directa sobre la puntual o en el haz	273
176. Puntos unidos y puntos límites de dos puntuales proyectivas superpuestas	275
177. Una propiedad de la circunferencia	276
178. Construcción de los elementos unidos de una proyectividad entre formas superpuestas	277
179. Eje de proyectividad de dos puntuales sobre la circunferencia; teorema de Pascal para la circunferencia. — <i>Ejercicios.</i>	277

CAPÍTULO IV

INVOLUCIÓN SOBRE UNA FORMA DE PRIMERA ESPECIE

	Página
180. Definición.....	285
181. Propiedad fundamental de la involución.....	287
182. Ecuación de la involución.....	288
183. Involución determinada por dos pares.....	288
184. Condición para que tres pares de elementos pertenezcan a una misma involución	289
185. Teorema de Desargues sobre el cuadrángulo completo.....	290
186. Elementos dobles de una involución	292
187. Propiedad fundamental de los elementos dobles de una involución.....	292
188. Construcción de los elementos dobles de una involución.....	293
189. Particularidades métricas de una involución.....	295
190. Involución circular.....	296
191. Par común a dos involuciones superpuestas	299
192. Rectas conjugadas y perpendiculares de una involución en el haz.....	300
193. Noción sobre la representación geométrica de los elementos imaginarios sobre una forma de primera especie. — <i>Ejercicios</i>	300

CAPÍTULO V

PROYECTIVIDAD ENTRE FORMAS DE SEGUNDA ESPECIE

194. Definición de proyectividad entre dos formas de segunda especie.....	307
195. Colineaciones y correlaciones.....	308
196. Producto de proyectividades.....	309
*197. Teorema de Staudt sobre la proyectividad entre formas de segunda especie.....	310
198. Determinación y construcción de una proyectividad entre dos formas de segunda especie.....	311
*199. Ecuaciones de la colineación entre dos planos.....	313
200. Nuevas observaciones sobre las ecuaciones de la colineación.....	314
201. Afinidad.....	317
202. Semejanza e igualdad.....	319
203. Elementos unidos de una colineación.....	321
204. Planos perspectivos	322
205. Homología plana.....	323
206. Propiedad fundamental y construcción de una homología.....	324
207. Característica de una homología.....	325
208. Propiedades y particularidades métricas de una homología.....	325
*209. Determinación analítica de los elementos unidos de una colineación entre planos superpuestos. — <i>Ejercicios</i>	328
*210. Correlaciones entre planos	337
*211. Correlación entre planos superpuestos	338
*212. Polaridad plana.....	341
*213. Correlación ortogonal entre dos radiaciones	343
*214. Polaridad ortogonal en la radiación o sobre el plano en el infinito. — <i>Ejercicios</i>	344

CAPÍTULO VI

PROYECTIVIDAD ENTRE DOS ESPACIOS

	Página
* 215. Colineaciones y correlaciones en el espacio	349
* 216. Determinación de una proyectividad entre dos espacios.....	349
217. Ecuaciones de la colineación entre dos espacios.....	350
* 218. Casos particulares métricos de colineaciones entre espacios	351
* 219. Elementos unidos en una colineación	353
* 220. Homología espacial.....	354
* 221. Un ejemplo de colineación axial	356
* 222. Correlaciones en el espacio.....	357
* 223. Correlaciones involutorias.....	358
* 224. Polaridad en el espacio. — <i>Ejercicios</i>	361

CUARTA PARTE

Curvas de segundo orden

CAPÍTULO I

POLARIDAD DEFINIDA POR LA CURVA

225. Reseña histórica	369
226. Definición de las cónicas.....	370
227. Ejemplos de cónicas.....	371
228. Número de puntos que individualizan una cónica.....	371
229. Intersecciones con una recta	373
230. Las tres especies de cónica. — <i>Ejercicios</i>	374
231. Intersecciones de una cónica con la recta que une dos puntos.....	377
232. Tangente	379
* 233. Par de tangentes a una cónica trazadas desde un punto	380
234. Puntos conjugados con respecto a una cónica.....	382
235. Polar de un punto ; polo de una recta	383
* 236. Ecuación tangencial de una cónica.....	384
237. Polaridad plana.....	385
238. Método de las polares recíprocas	386
239. Construcción de la polar de un punto y del polo de una recta	388
240. Triángulos autopolares.....	389
* 241. Ecuación de una cónica referida a un triángulo autopolar	390
242. Cónicas degeneradas.....	392
243. Determinación de las rectas que componen una cónica degenerada	394
244. Pares particulares de rectas.....	395
245. Polaridad con respecto a un par de rectas	396
* 246. Envoltorios degenerados — <i>Ejercicios</i>	396

CAPÍTULO II

CONSTRUCCION DE CÓNICAS

TEOREMAS DE PASCAL, BRIANCHON Y DESARGUES

	Página
247. Generación de una cónica mediante formas proyectivas	403
248. Construcción de una cónica determinada por cinco puntos.....	404
249. Puntual sobre una cónica envolvente de las tangentes a la curva.....	405
250. Construcción de una cónica determinada por cinco tangentes.....	406
251. Teoremas de Pascal y Brianchon. — <i>Ejercicios</i>	407
252. Teorema de Desargues sobre las cónicas	411
253. Construcción de una cónica que pasa por cuatro puntos y es tangente a una recta ; problema dual.....	412
254. Corolarios del teorema de Desargues	412
255. Intersecciones de dos cónicas	413
256. Haz de cónicas	415
* 257. Cónicas degeneradas de un haz	416
* 258. Contacto de dos cónicas	418
259. Ecuación de una cónica sujeta a condiciones dadas	420
* 260. Familia de cónicas. — <i>Ejercicios</i>	421

CAPÍTULO III

PROPIEDADES DIAMETRALES

261. Diámetro de una cónica	430
262. Centro	431
263. Asíntotas	432
264. Diámetros conjugados	433
265. Ejes de una cónica	434
266. Determinación analítica de los ejes	436
267. Caso particular de la circunferencia. — <i>Ejercicios</i>	437

CAPÍTULO IV

FORMAS REDUCIDAS DE LAS ECUACIONES DE LAS CÓNICAS

268. Cónica referida a sistemas cartesianos particulares	440
269. Discusión de la ecuación normal de una cónica con centro	442
270. Elipse	443
271. Hipérbola	444
272. Hipérbola equilátera	446
273. Algunas fórmulas relativas a la ecuación normal de una cónica con centro	446
274. Hipérbola referida a las asíntotas	447
275. Parábola. Propiedades de la tangente y de la normal	448
276. Métodos para reducir a forma simple la ecuación de una cónica	449
277. Comportamiento de una cónica con respecto a transformaciones particulares de coordenadas	450
278. Invariantes de una cónica relativos a una transformación de coordenadas	451

279. Formación de la ecuación reducida de una cónica por medio de los invariantes	456
280. Significado geométrico de la anulación de un invariante	457
*281. Teoremas de Apolonio. — <i>Ejercicios</i>	458

CAPÍTULO V

PROPIEDADES FOCALES DE LAS CÓNICAS

282. Definición de foco	467
283. Determinación de los focos de la elipse y de la hipérbola	467
284. Algunas propiedades angulares de los focos	469
285. Propiedades de los rayos focales	470
286. Directrices de una cónica con centro	471
287. Otras propiedades focales de las cónicas con centro	472
288. Foco de la parábola	473
289. Otras propiedades focales de la parábola	474
290. Ecuación polar de una cónica con respecto al foco	475
291. Cónicas confocales. — <i>Ejercicios</i>	476

CAPÍTULO VI

TRANSFORMACIÓN DE UNA CÓNICA MEDIANTE UNA COLINEACIÓN

292. Cónicas colineales	485
293. Cónicas homológicas	486
294. Cónicas afines	487
295. Cónicas semejantes	488
296. Cónicas homotéticas. — <i>Ejercicios</i>	489

QUINTA PARTE

SUPERFICIES DE SEGUNDO ORDEN

CAPÍTULO I

POLARIDAD DEFINIDA POR UNA SUPERFICIE

297. Definiciones y ejemplos de cuádricas	495
298. Número de puntos que individualizan una cuádrica	496
299. Intersecciones con una recta	496
300. Intersección con un plano	497
301-302-303. Plano tangente	498
304. Intersecciones de una cuádrica con la recta que une dos puntos	502
305. Ecuación del plano tangente	503
*306. Cono circunscripto a la cuádrica desde un punto	504
307. Puntos conjugados con respecto a una cuádrica	505
308. Plano polar de un punto	505

* 309. Ecuación tangencial de una cuádrica	506
310. Polaridad determinada por una cuádrica	507
311. Planos tangentes a una cuádrica trazados por una recta	508
312. Tangentes conjugadas en un punto de una cuádrica	508
313. Planos tangentes que pasan por un punto	510
314. Figuras autoconjugadas con respecto a una cuádrica	511
315-316. Superficies degeneradas de segundo orden	512
317. Polaridad con respecto a un cono	514
* 318. Envolventes degeneradas de segunda clase. — <i>Ejercicios</i>	515

CAPÍTULO II

RECTAS DE UNA CUÁDRICA. GENERACIÓN DE CUÁDRICAS REGLADAS
HACES Y FAMILIAS DE CUÁDRICAS

319. Puntos elípticos, parabólicos, hiperbólicos	520
320. Cuádricas de puntos parabólicos	521
321. Cuádricas de puntos hiperbólicos	521
322. Los dos sistemas de rectas de una cuádrica reglada	522
323. Construcción de una cuádrica reglada	523
324. Generación de cuádricas regladas mediante formas proyectivas	524
325. Algunas propiedades de las cuádricas regladas	526
* 326. Ház de cuádricas	527
* 327. Familia de cuádricas. — <i>Ejercicios</i>	530

CAPÍTULO III

PROPIEDADES DIAMETRALES

328. Sección de una cuádrica con el plano en el infinito	536
329. Secciones de una cuádrica con planos paralelos	539
330. Planos diametrales	539
331. Centro	540
332. Diámetros	541
333. Cono asintótico	542
334. Pares de planos diametales conjugados	542
335. Ternas de planos diametales conjugados	543
336. Planos principales	544
337. Planos principales de las cuádricas con centro	546
338. Planos principales de un paraboloides	547
339. Casos particulares ; cuádricas de revolución ; esfera	548
340. Planos principales de una cuádrica en relación con la circunferencia absoluta. — <i>Ejercicios</i>	551

CAPÍTULO IV

ECUACIONES REDUCIDAS DE LAS CUÁDRICAS

	Página
341. Cuádricas referidas a sistemas cartesianos particulares.....	555
342. Discusión de la ecuación normal de una cuádrica con centro.....	556
343. Elipsóide	558
344. Hiperboloide de una hoja.....	560
345. Hiperboloide de dos hojas.....	562
346. Algunas fórmulas relativas a la ecuación normal de una cuádrica con centro.....	564
347. Discusión de la ecuación reducida de un parabolóide.....	566
348. Parabolóide elíptico	567
349. Parabolóide hiperbólico.....	568
350. Algunas fórmulas relativas a la ecuación reducida de los paraboloides.....	571
351. Efecto de transformaciones particulares de coordenadas sobre la ecuación de una cuádrica.....	571
352. Invariantes de una cuádrica respecto de una transformación ortogonal de coordenadas.....	573
353. Cálculo de los coeficientes de la ecuación reducida de una cuádrica por medio de los invariantes.....	576
354. Clasificación de las cuádricas a partir de la ecuación general.....	579
355. Significado del signo del discriminante.....	581
356. Clasificación proyectiva de las cuádricas. — <i>Ejercicios</i>	582

CAPÍTULO V

SECCIONES CIRCULARES. CUÁDRICAS CONFOCALES

357. Secciones circulares de una cuádrica ; determinación sintética.....	587
358. Secciones circulares ; determinación analíticas.....	590
* 359. Cuádricas con centro confocales	592
* 360. Paraboloides confocales.....	598
* 361. Cónicas focales de una cuádrica.....	599
* 362. Cónicas focales conjugadas. — <i>Ejercicios</i>	600

APÉNDICE

I

Sobre los problemas geométricos

363. Clasificación de los problemas geométricos.....	609
364. Sobre las construcciones que se pueden efectuar mediante la regla.....	614
365. Sobre los problemas resolubles empleando solamente la regla.....	616
366. Sobre las construcciones efectuables mediante la regla y el compás.....	617
367. Sobre los problemas resolubles mediante la regla y compás.....	619
368. Ejemplos de problemas de segundo grado, o de grado superior, resolublos con medios elementales.....	629

Página

369. Sobre algunos instrumentos aptos para substituir al compás en las construcciones elementales	621
370. Resolución de los problemas de 3º y 4º grado mediante una cónica fija.	625
371. Los problemas de la duplicación del cubo y de la trisección del ángulo.	626
372. El problema de los polígonos regulares	628
373. El problema de la rectificación de la circunferencia	629

II

Recopilación de algunas fórmulas de geometría analítica

A. Geometría plana.....	631
Puntos y rectas.....	631
Transformación de coordenadas	633
Curvas de segundo orden	633
B. Geometría del espacio.....	636
Puntos, planos y rectas.....	636
Transformación de coordenadas	639
Superficies particulares.....	640
Quádricas.....	641