

# Contenido

355



UNIVERSIDAD NACIONAL DEL ENTRE RÍOS  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CENTRO DE MEDIOS  
BIBLIOTECA

## Capítulo 1: La recta y los números reales 1

- 1.1 Operaciones con segmentos 1
  - 1.1.1 Introducción 1
  - 1.1.2 Suma de segmentos 1
  - 1.1.3 Resta de segmentos 2
  - 1.1.4 Multiplicación de segmentos 2
  - 1.1.5 Multiplicación de un segmento por un número natural 3
  - 1.1.6 División de un segmento por un número natural 3
  - 1.1.7 Multiplicación y división de un segmento por un número racional, positivo 4
  - 1.1.8 Multiplicación y división de un segmento por un número irracional 5
- 1.2 Orientación de segmentos y de rectas 6
  - 1.2.1 Segmentos orientados 6
  - 1.2.2 Operaciones con segmentos orientados 7
  - 1.2.3 Rectas orientadas 9
- 1.3 Sistema de abscisas en la recta 10
  - 1.3.1 Ejes 10
  - 1.3.2 Abscisas 10
  - 1.3.3 Longitud de segmentos orientados 12
- 1.4 Transformación de coordenadas en la recta 12
  - 1.4.1 Preliminares 12
  - 1.4.2 Cambio de coordenadas 13
  - 1.4.3 Cambio de la orientación 14
  - 1.4.4 Cambio de la unidad solamente 15
  - 1.4.5 Cambios de dos elementos simultáneamente 16
  - 1.4.6 Nota sobre la orientación y la unidad 17
  - 1.4.7 Caso general 18

## Capítulo 2: Coordenadas en el plano y en el espacio 21

- 2.1 Coordenadas cartesianas en el plano, ortogonales y oblicuas 21
- 2.2 Coordenadas cartesianas en el espacio, ortogonales y oblicuas 23
  - 2.2.1 Orientación de un sistema de coordenadas cartesianas en el espacio 24
- 2.3 Coordenadas polares en el plano 25
  - 2.3.1 Pasaje del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales al sistema de coordenadas polares y recíprocamente 26
- 2.4 Coordenadas esféricas en el espacio 28
  - 2.4.1 Pasaje del sistema de coordenadas cartesianas ortogonales al sistema de coordenadas esféricas y recíprocamente 29
- 2.5 Coordenadas cilíndricas en el espacio 31

## Contenido

- 2.5.1 Pasaje del sistema de coordenadas ortogonales al sistema de coordenadas cilíndricas y recíprocamente 32
- 2.6 Representación gráfica de funciones en distintos sistemas de coordenadas 33

### Capítulo 3: Ecuaciones y conjuntos de puntos 37

- 3.1 Conjunto de puntos o lugar geométrico 37
- 3.2 Definición de ecuación de un conjunto de puntos en el plano y en el espacio 38
- 3.3 Ecuaciones de conjuntos de puntos elementales 40
  - 3.3.1 Rectas paralelas a los ejes coordenados 40
  - 3.3.2 Ecuaciones de los ejes coordenados 41
  - 3.3.3 Distancia entre dos puntos del plano 41
  - 3.3.4 Circunferencia con centro en el origen de coordenadas 42
  - 3.3.5 Planos paralelos a los planos coordenados 43
  - 3.3.6 Ecuaciones de los planos coordenados 44
  - 3.3.7 Rectas paralelas a los ejes coordenados 44
  - 3.3.8 Ecuaciones de los ejes coordenados 46
- 3.4 Ecuaciones equivalentes para un conjunto de puntos 47
- 3.5 Ecuación de la reunión de dos conjuntos de puntos 47
- 3.6 Ecuación de la intersección de dos conjuntos de puntos 50
- 3.7 Conjuntos de puntos definidos por su ecuación. Relación con 2.6 51
  - 3.7.1 En el plano 52
  - 3.7.2 Inecuaciones en el plano 54
  - 3.7.3 En el espacio 56
  - 3.7.4 Ecuaciones de una curva alabeada 57
- 3.8 Relaciones elementales entre propiedades geométricas de las figuras y propiedades de las ecuaciones 57
  - 3.8.1 Conjunto simétrico respecto al eje  $x$  58
  - 3.8.2 Conjunto simétrico respecto al eje  $y$  59
  - 3.8.3 Conjunto simétrico respecto del origen de coordenadas 60
  - 3.8.4 Curvas algebraicas 62
  - 3.8.5 En el espacio 63

### Capítulo 4: Vectores. Algebra vectorial 65

- 4.1 Vectores aplicados 65
  - 4.1.1 Operaciones fundamentales con vectores aplicados 66
  - 4.1.2 Propiedades de las operaciones definidas 68
- 4.2 Vectores libres 72
  - 4.2.1 Segmentos orientados equipolentes 72
  - 4.2.2 Vectores libres 73
  - 4.2.3 Operaciones a realizar con vectores libres 74
  - 4.2.4 Propiedades de las operaciones definidas 75

4.2.5	Combinación lineal de vectores	77
4.3	Espacios vectoriales reales	78
4.3.1	Espacio vectorial de las ternas ordenadas de números reales	80
4.3.2	Isomorfismo de espacios vectoriales	82
4.3.3	Espacio vectorial $\mathbb{R}^n$	85
4.3.4	Isomorfismo entre vectores aplicados y vectores libres	86
4.4	Vectores en coordenadas	88
4.4.1	Módulo de un vector. Definición	88
4.4.2	Proyección de un vector sobre un eje	89
4.4.3	Vectores aplicados en coordenadas	92
4.4.4	Expresión en coordenadas de un vector libre	93
4.4.5	Cosenos directores de un vector	94
4.5	Dependencia lineal de vectores	95
4.6	Bases y dimensiones	100
4.6.1	Dimensión de un espacio vectorial	101
4.6.2	Coordenadas de un vector	105
4.7	Producto escalar de dos vectores	107
4.7.1	Propiedades del producto escalar	107
4.7.2	Significado geométrico del producto escalar para vectores del plano y del espacio	108
4.7.3	Condición de ortogonalidad	109
4.7.4	Módulo o norma de un vector en coordenadas	110
4.7.5	Ángulos entre dos vectores en $\mathbb{R}^2$ ó $\mathbb{R}^3$	111
4.7.6	Definiciones en $\mathbb{R}^n$	111
4.7.7	Versores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$	112
4.8	Bases ortonormadas	114
4.9	Desigualdad de Schwarz y propiedad triangular	116
4.9.1	Desigualdad de Schwarz	116
4.9.2	Propiedad triangular	117
4.10	Producto vectorial	118
4.10.1	Módulo de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$	119
4.10.2	Dirección de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$	120
4.10.3	Sentido de $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b} = \mathbf{c}$	120
4.10.4	Propiedades del producto vectorial	121
4.10.5	Área de un triángulo	122
4.11	Doble producto mixto	124
4.11.1	Propiedades del producto mixto	124
4.11.2	Interpretación geométrica del doble producto mixto	125
4.11.3	Volumen de un tetraedro	126
4.11.4	Condición de coplanaridad de tres vectores	127
4.12	Doble producto vectorial	128
4.12.1	Propiedades	128

## Contenido

### Capítulo 5: Geometría lineal 131

- 5.1 Ecuaciones vectoriales y cartesianas ordinarias de un conjunto 131
  - 5.1.1 Pasaje de la ecuación vectorial a la ecuación cartesiana 132
- 5.2 Ecuaciones paramétricas 134
- 5.3 Ecuaciones de una recta 135
  - 5.3.1 Ecuación vectorial paramétrica de una recta del plano o del espacio 135
  - 5.3.2 Ecuaciones cartesianas paramétricas de la recta 136
  - 5.3.3 Ecuaciones de una recta en función de los cosenos directores de un vector paralelo a ella 137
  - 5.3.4 Relación entre cosenos y coeficientes directores 138
  - 5.3.5 Ecuaciones simétricas de una recta 139
  - 5.3.6 Ecuaciones reducidas de una recta no paralela a los planos coordenados 140
  - 5.3.7 Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados 142
- 5.4 Paralelismo de rectas 145
- 5.5 Intersección de rectas 146
- 5.6 Perpendicularidad de rectas 149
  - 5.6.1 En el plano 149
  - 5.6.2 En el espacio 150
- 5.7 Ecuaciones de rectas en el plano 151
  - 5.7.1 Ecuación de una recta en el plano que pasa por dos puntos dados 151
  - 5.7.2 Ecuación general implícita de la recta en el plano 152
  - 5.7.3 Ecuación segmentaria de la recta en el plano 154
  - 5.7.4 Pendiente de una recta 156
  - 5.7.5 Relación entre la pendiente, las coordenadas al origen y los coeficientes de la ecuación implícita 158
  - 5.7.6 Ecuación explícita de las rectas del plano 159
- 5.8 Ecuaciones del plano en el espacio 161
  - 5.8.1 Ecuación vectorial paramétrica 161
  - 5.8.2 Ecuaciones cartesianas paramétricas del plano 162
  - 5.8.3 Determinación de planos 163
- 5.9 Ecuaciones normales de rectas y planos 168
- 5.10 Ecuación implícita del plano en el espacio 171
  - 5.10.1 Pasaje de la ecuación implícita a la normal 172
  - 5.10.2 Ecuación segmentaria del plano 174
- 5.11 Haces de rectas en el plano 174
  - 5.11.1 Haz de rectas determinado por la intersección de dos rectas dadas 176
- 5.12 Haces y radiaciones de planos 178
  - 5.12.1 Determinación de rectas en el espacio mediante planos 179
  - 5.12.2 Haz de planos determinado por la intersección de dos planos 180

- 5.12.3 Pasaje de la ecuación de una recta del espacio dada por la intersección de dos planos a la forma reducida 182

**Capítulo 6: Geometría métrica 185**

- 6.1 Vectores normales 185
- 6.1.1 Sentido positivo de la normal a una recta del plano 185
- 6.1.2 Sentido positivo de la normal a un plano 187
- 6.2 Distancias 188
- 6.2.1 Distancia de un punto a una recta del plano 188
- 6.2.2 Distancia de un punto a un plano 190
- 6.2.3 Distancia entre dos rectas paralelas 191
- 6.2.4 Distancia de un punto a una recta del espacio 193
- 6.2.5 Distancia de una recta a un plano paralela a ella 195
- 6.2.6 Distancia entre dos rectas alabeadas 195
- 6.3 Rectas bisectrices y planos bisectores 199
- 6.3.1 Rectas bisectrices 199
- 6.3.2 Planos bisectores 201
- 6.4 Angulos 203
- 6.4.1 Angulos entre dos rectas del plano. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas del plano 203
- 6.4.2 Angulo entre dos planos. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de planos 206
- 6.4.3 Angulo entre recta y plano. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas y planos 209
- 6.4.4 Angulo entre rectas del espacio. Condiciones de paralelismo y perpendicularidad de rectas del espacio 214

**Capítulo 7: Curvas y superficies 219**

- 7.1 Ecuaciones cartesianas paramétricas de una curva en el plano 219
- 7.2 Ecuaciones cartesianas paramétricas de una curva en el espacio 221
- 7.3 Ecuaciones cartesianas paramétricas de una superficie 222
- 7.4 Circunferencia 223
- 7.4.1 Ecuación general de la circunferencia 224
- 7.4.2 Ecuación polar de la circunferencia 227
- 7.4.3 Ecuaciones paramétricas de la circunferencia 228
- 7.4.4 Determinación de circunferencias 229
- 7.4.5 Circunferencia determinada por tres puntos 229
- 7.4.6 Intersección de recta y circunferencia 232
- 7.4.7 Potencia de un punto respecto a una circunferencia 233
- 7.4.8 Intersección de circunferencias 235
- 7.4.9 Eje radical de dos circunferencias 237
- 7.4.10 Centro radical de tres circunferencias 238

UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 CENTRO DE MEDIOS  
 BIBLIOTECA

## Contenido

- 7.4.11 Circunferencias ortogonales 239
- 7.4.12 Haces de circunferencias 240
- 7.5 Esfera 244
  - 7.5.1 Ecuación general de la esfera 244
  - 7.5.2 Ecuaciones paramétricas de la esfera 245
  - 7.5.3 Esfera determinada por cuatro puntos 246
  - 7.5.4 Potencia de un punto respecto a una esfera 247
  - 7.5.5 Plano radical de dos esferas 247
  - 7.5.6 Eje radical de tres esferas 248
  - 7.5.7 Centro radical de cuatro esferas 249
- 7.6 Las cónicas 249
  - 7.6.1 Ecuaciones de la elipse y la hipérbola 250
  - 7.6.2 Ecuación de la parábola 253
  - 7.6.3 Elementos de la elipse 255
  - 7.6.4 Elementos de la hipérbola 256
  - 7.6.5 Elementos de la parábola 256
  - 7.6.6 Propiedades de la elipse deducidas de su ecuación 257
  - 7.6.7 Propiedades de la hipérbola deducidas de su ecuación 257
  - 7.6.8 Asíntotas de la hipérbola 258
  - 7.6.9 Propiedades de la parábola deducidas de su ecuación 259
  - 7.6.10 Ecuaciones de las cónicas con otros ejes 260
  - 7.6.11 Ecuaciones de las cónicas cuyo centro o vértice no coincide con el origen de coordenadas 260
  - 7.6.12 Hipérbola equilátera 262
  - 7.6.13 Hipérbolas conjugadas 262
  - 7.6.14 Ecuaciones paramétricas de las cónicas 263
- 7.7 Superficies regladas 265
- 7.8 Superficies cónicas y cilíndricas 266
  - 7.8.1 Superficies cilíndricas 266
  - 7.8.2 Cilindro recto 272
  - 7.8.3 Superficies cónicas 273
  - 7.8.4 Cono con vértice en el origen de coordenadas 277
- 7.9 Superficies de revolución 278
- 7.10 Las cuádricas 283
  - 7.10.1 Elipsoide 283
  - 7.10.2 Hiperboloide de una hoja 285
  - 7.10.3 Hiperboloide de dos hojas 288
  - 7.10.4 Paraboloide elíptico 291
  - 7.10.5 Paraboloide hiperbólico 293
- 7.11 Generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja y del paraboloide hiperbólico 296
  - 7.11.1 Generatrices rectilíneas del hiperboloide de una hoja 296

- 7.11.2 Generatrices rectilíneas del paraboloides hiperbólico 298
- 7.12 Cono asintótico de las cuádricas 299

**Capítulo 8: Transformaciones lineales y matrices 303**

- 8.1 Transformaciones en general 303
  - 8.1.1 Transformación inyectiva 304
  - 8.1.2 Transformación suryectiva 304
  - 8.1.3 Transformación biyectiva 304
- 8.2 Transformaciones lineales 305
  - 8.2.1 Transformación lineal nula 306
  - 8.2.2 Transformación lineal idéntica 307
  - 8.2.3 Espacio vectorial de las transformaciones lineales 307
  - 8.2.4 Composición de transformaciones lineales 309
  - 8.2.5 Transformación inversa 310
- 8.3 Matrices 312
  - 8.3.1 Matrices especiales 312
  - 8.3.2 Matriz de un vector 314
  - 8.3.3 Espacio vectorial de las matrices de orden  $m \times n$  315
  - 8.3.4 Producto de matrices 316
  - 8.3.5 Producto de una matriz cuadrada por la matriz traspuesta de la matriz de sus cofactores 317
  - 8.3.6 Producto escalar de vectores en forma matricial 319
  - 8.3.7 Traspuesta de una suma y de un producto de matrices 320
  - 8.3.8 Matriz ortogonal 320
  - 8.3.9 Matriz inversa 321
- 8.4 Correspondencia entre transformaciones lineales y matrices 323
  - 8.4.1 Fórmulas para expresar una transformación lineal de  $\mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^n$  326
  - 8.4.2 Matriz asociada a la transformación lineal que se obtiene multiplicando una transformación lineal  $T$  por un número real 328
  - 8.4.3 Matriz asociada a la transformación lineal suma de dos transformaciones lineales 329
  - 8.4.4 Matriz asociada a la composición de transformaciones lineales 330
  - 8.4.5 Matriz asociada a la transformación lineal idéntica 332
  - 8.4.6 Matriz asociada a la transformación lineal inversa de una transformación lineal dada 332
  - 8.4.7 Isomorfismo entre transformaciones lineales y matrices 334
- 8.5 Transformaciones lineales ortogonales 334
- 8.6 Transformaciones afines 336
  - 8.6.1 Matriz de una transformación afín 336
- 8.7 Movimientos rígidos o congruencias en el plano 337
  - 8.7.1 Movimientos rígidos en  $\mathbb{R}^2$  340
- 8.8 Traslaciones en el plano 348

## Contenido

- 8.8.1 Fórmulas de la transformación 348
- 8.8.2 Transformación inversa 349
- 8.9 Rotaciones en el plano 350
  - 8.9.1 Rotaciones con centro en el origen 350
  - 8.9.2 Rotaciones con centro en  $Q(\alpha, \beta)$  350
  - 8.9.3 Cálculo del centro de rotación 352
- 8.10 Simetrías en el plano 353
  - 8.10.1 Simetría respecto de un punto 353
  - 8.10.2 Simetría respecto a una recta que pasa por el origen 353
  - 8.10.3 Simetría respecto a una recta que no pasa por el origen 355
- 8.11 Movimientos rígidos en el espacio 357
  - 8.11.1 Traslaciones 357
  - 8.11.2 Rotaciones con centro en el origen de coordenadas 357
- 8.12 Cambio de coordenadas 359
  - 8.12.1 Matriz que da un cambio de base 364
  - 8.12.2 Fórmulas de transformación de coordenadas 366
  - 8.12.3 Matriz de una transformación lineal cuando se efectúa un cambio de base 368
- 8.13 Semejanza de matrices 371
  - 8.13.1 Matrices diagonalizables 372
- 8.14 Autovalores y autovectores de una transformación lineal y de su matriz 372
  - 8.14.1 Autovalores y autovectores de una transformación lineal 372
  - 8.14.2 Autovectores y autovalores de una matriz cuadrada 374
  - 8.14.3 Cálculo de los autovalores de una matriz 375
  - 8.14.4 Polinomio característico de una matriz 377
- 8.15 Diagonalización de una matriz simétrica 378
  - 8.15.1 Simetría de la matriz de una transformación lineal 378
  - 8.15.2 Complemento ortogonal del subespacio propio 380
  - 8.15.3 Autovalores y autovectores de una matriz simétrica 382

## Capítulo 9: Ecuación general de segundo grado 389

- 9.1 Ecuación general de segundo grado en dos variables 389
  - 9.1.1 Forma matricial 389
  - 9.1.2 Invariantes de la ecuación general de segundo grado en dos variables al efectuar una transformación ortogonal 391
- 9.2 Reducción de la ecuación general de segundo grado en dos variables a la forma canónica 396
- 9.3 Reducción de la ecuación general de segundo grado en dos variables a la forma canónica mediante el empleo de invariantes 404
- 9.4 Clasificación de cónicas 408
  - 9.4.1 Cónica degenerada 410
  - 9.4.2 Hipérbola equilátera 411

- 9.5 Elementos de las cónicas 412
  - 9.5.1 Centro de una cónica 412
  - 9.5.2 Ejes de una cónica 413
  - 9.5.3 Tangente a una cónica 417
- 9.6 Haces de cónicas 420
  - 9.6.1 Intersección de cónicas y recta 420
  - 9.6.2 Intersección de cónicas 423
  - 9.6.3 Haces lineales de cónicas 423
- 9.7 Determinación de cónicas 426
  - 9.7.1 Cónica que pasa por cinco puntos 426
  - 9.7.2 Cónica tangente a dos rectas en dos de sus puntos y que pasa además por otro punto del plano 427
  - 9.7.3 Cónica que pasa por cuatro puntos y de género parábola, hipérbola equilátera o par de rectas 428
  - 9.7.4 Cónica tangente a dos rectas en dos puntos dados, y de género parábola, hipérbola equilátera o par de rectas 428
- 9.8 Ecuación general de segundo grado en tres variables 430
  - 9.8.1 Forma matricial 431
  - 9.8.2 Invariantes de la ecuación general de segundo grado en tres variables 432
- 9.9 Reducción de la ecuación general de segundo grado en tres variables a la forma canónica 434
- 9.10 Reducción de la ecuación general de segundo grado en tres variables a la forma canónica mediante el empleo de invariantes 444
- 9.11 Clasificación de cuádricas 451
- 9.12 Elementos de las cuádricas 455
- 9.13 Plano tangente a una cuádrica 458
  - 9.13.1 Intersección de una cuádrica con una recta 458
  - 9.13.2 Intersección de una cuádrica con un plano 458

Indice 463

355



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS  
 FACULTAD DE INGENIERIA  
 CENTRO DE MEDIOS  
 BIBLIOTECA