



# INDICE

## PREFACIO

### CAPITULO I. NUMERO. VARIABLE. FUNCION

§ 1. Números reales. Representación de números reales por medio de puntos en el eje numérico . . . . .	7
§ 2. Valor absoluto del número real . . . . .	9
§ 3. Magnitudes variables y constantes . . . . .	10
§ 4. Campo de variación de la magnitud variable . . . . .	11
§ 5. Variable ordenada. Variables crecientes y decrecientes. Variable acotada . . . . .	13
§ 6. Función . . . . .	14
§ 7. Formas de expresión de funciones . . . . .	15
§ 8. Funciones elementales fundamentales. Funciones elementales . . . . .	17
§ 9. Funciones algebraicas . . . . .	22
§ 10. Sistema de coordenadas polares . . . . .	24
<i>Ejercicios para el capítulo I</i>	

### CAPITULO II. LIMITE. CONTINUIDAD DE LA FUNCION

§ 1. Límite de la magnitud variable. Variable infinitamente grande . . . . .	28
§ 2. Límite de la función . . . . .	31
§ 3. Función que tiende al infinito. Funciones acotadas . . . . .	34
§ 4. Infinitesimales y sus principales propiedades . . . . .	38
§ 5. Teoremas fundamentales sobre límites . . . . .	42
§ 6. Límite de la función $\frac{\text{sen } x}{x}$ , cuando $x \rightarrow 0$ . . . . .	46
§ 7. Número $e$ . . . . .	48
§ 8. Logaritmos naturales . . . . .	53

§ 9. Continuidad de las funciones . . . . .	54
§ 10. Algunas propiedades de las funciones continuas . . . . .	59
§ 11. Comparación de las magnitudes infinitesimales . . . . .	62
<i>Ejercicios para el capítulo II</i>	

### CAPITULO III. DERIVADA Y DIFERENCIAL

§ 1. Velocidad del movimiento . . . . .	68
§ 2. Definición de la derivada . . . . .	70
§ 3. Interpretación geométrica de la derivada . . . . .	72
§ 4. Derivación de las funciones . . . . .	74
§ 5. Derivadas de las funciones elementales. Derivada de la función $y = x^n$ , siendo $n$ entero y positivo . . . . .	76
§ 6. Derivadas de las funciones $y = \text{sen } x$ ; $y = \text{cos } x$ . . . . .	78
§ 7. Derivadas de una magnitud constante, del producto de una magnitud constante por una función, de una suma, producto y cociente . . . . .	79
§ 8. Derivada de la función logarítmica . . . . .	84
§ 9. Derivada de la función compuesta . . . . .	85
§ 10. Derivadas de las funciones $y = \text{tg } x$ , $y = \text{cotg } x$ , $y = \ln  x $ . . . . .	88
§ 11. Función implícita y su derivación . . . . .	90
§ 12. Derivadas de la función potencial con exponente real cualquiera, de la función exponencial y de la función exponencial compuesta . . . . .	92
§ 13. Función inversa y su derivación . . . . .	94
§ 14. Funciones trigonométricas inversas y su derivación . . . . .	98
§ 15. Tabla de las fórmulas fundamentales para la derivación . . . . .	103
§ 16. Representación paramétrica de función . . . . .	104
§ 17. Ecuaciones paramétricas de algunas curvas . . . . .	106
§ 18. Derivada de la función dada paraméricamente . . . . .	109
§ 19. Funciones hiperbólicas . . . . .	111
§ 20. Diferencial . . . . .	114
§ 21. Significado geométrico de la diferencial . . . . .	118
§ 22. Derivadas de diversos órdenes . . . . .	119
§ 23. Diferenciales de diversos órdenes . . . . .	122
§ 24. Derivadas de diversos órdenes de funciones implícitas y de funciones representadas paraméricamente . . . . .	123
§ 25. Interpretación mecánica de la segunda derivada . . . . .	126
§ 26. Ecuaciones de la línea tangente y de la normal. Longitudes de la línea subtangente y de la subnormal . . . . .	127
§ 27. Interpretación geométrica de la derivada del radio vector respecto al ángulo polar . . . . .	130
<i>Ejercicios para el capítulo III</i>	

CAPITULO IV. TEOREMAS SOBRE LAS FUNCIONES DERIVABLES

§ 1. Teorema sobre las raíces de la derivada (Teorema de Rolle)	141
§ 2. Teorema sobre los incrementos finitos (Teorema de Lagrange)	143
§ 3. Teorema sobre la razón de los incrementos de dos funciones (Teorema de Cauchy)	145
§ 4. Límite de la razón de dos infinitesimales («Cálculo de límites indeterminados del tipo $\frac{0}{0}$ »)	146
§ 5. Límite de la razón de dos magnitudes infinitamente grandes («Cálculo de límites indeterminados de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ »)	149
§ 6. Fórmula de Taylor	155
§ 7. Desarrollo de las funciones $e^x$ , $\text{sen } x$ y $\text{cos } x$ por la fórmula de Taylor	159
<i>Ejercicios para el capítulo IV</i>	

CAPITULO V. ANALISIS DE LA VARIACION DE LAS FUNCIONES

§ 1. Generalidades	166
§ 2. Crecimiento y decrecimiento de una función.	167
§ 3. Máximo y mínimo de las funciones	169
§ 4. Análisis del máximo y mínimo de una función derivable mediante la primera derivada	175
§ 5. Análisis del máximo y mínimo de una función mediante la segunda derivada	178
§ 6. Valores máximo y mínimo de una función en un segmento	182
§ 7. Aplicación de la teoría de máximos y mínimos de las funciones a la solución de problemas	183
§ 8. Análisis de los valores máximo y mínimo de una función mediante la fórmula de Taylor	185
§ 9. Convexidad y concavidad de la curva. Puntos de inflexión	188
§ 10. Asíntotas	194
§ 11. Esquema general del análisis de funciones y de la construcción de gráficas	199
§ 12. Análisis de las curvas dadas en forma paramétrica	204
<i>Ejercicios para el capítulo V</i>	

## CAPITULO VI. CURVATURA DE UNA CURVA

§ 1. Longitud del arco y su derivada . . . . .	214
§ 2. Curvatura . . . . .	216
§ 3. Cálculo de la curvatura . . . . .	218
§ 4. Cálculo de la curvatura de una curva dada en forma paramétrica . . . . .	221
§ 5. Cálculo de la curvatura de una curva dada en coordenadas polares . . . . .	222
§ 6. Radio y círculo de curvatura. Centro de curvatura. Evoluta y evolvente. . . . .	224
§ 7. Propiedades de la evoluta. . . . .	229
§ 8. Cálculo aproximado de las raíces reales de una ecuación. . . . .	233
<i>Ejercicios para el capítulo VI</i>	

## CAPITULO VII. NUMEROS COMPLEJOS. POLINOMIOS

§ 1. Números complejos. Generalidades . . . . .	241
§ 2. Operaciones fundamentales con números complejos . . . . .	243
§ 3. Elevación a potencia y extracción de la raíz del número complejo . . . . .	246
§ 4. Función exponencial con exponente complejo y sus propiedades . . . . .	249
§ 5. Fórmula de Euler. Forma exponencial del número complejo . . . . .	252
§ 6. Desarrollo del polinomio en factores. . . . .	253
§ 7. Raíces múltiples del polinomio . . . . .	257
§ 8. Factorización de un polinomio con raíces complejas . . . . .	258
§ 9. Interpolación. Fórmula de la interpolación de Lagrange . . . . .	259
§ 10. Fórmula de la interpolación de Newton . . . . .	262
§ 11. Derivación numérica . . . . .	264
§ 12. Óptima aproximación de las funciones por medio de polinomios. Teoría de Chébishev. . . . .	265
<i>Ejercicios para el capítulo VII</i>	

## CAPITULO VIII. FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

§ 1. Definición de las funciones de varias variables . . . . .	268
§ 2. Representación geométrica de una función de dos variables . . . . .	271

§ 3. Incremento parcial y total de la función . . . . .	272
§ 4. Continuidad de la función de varias variables . . . . .	274
§ 5. Derivadas parciales de la función de varias variables . . . . .	277
§ 6. Interpretación geométrica de las derivadas parciales de una función de dos variables . . . . .	279
§ 7. Incremento total y diferencial total . . . . .	280
§ 8. Aplicación de la diferencial total para cálculos aproximados . . . . .	284
§ 9. Utilización de la diferencial para evaluar el error de cálculo . . . . .	286
§ 10. Derivada de una función compuesta. Derivada total . . . . .	290
§ 11. Derivada de una función definida implícitamente . . . . .	292
§ 12. Derivadas parciales de diferentes órdenes . . . . .	296
§ 13. Superficies de nivel . . . . .	300
§ 14. Derivada siguiendo una dirección . . . . .	301
§ 15. Gradiente . . . . .	304
§ 16. Fórmula de Taylor para una función de dos variables . . . . .	307
§ 17. Máximo y mínimo de una función de varias variables . . . . .	309
§ 18. Máximo y mínimo de la función de varias variables relacionadas mediante ecuaciones dadas (máximos y mínimos condicionados) . . . . .	318
§ 19. Obtención de una función a base de datos experimentales según el método de cuadrados mínimos . . . . .	323
§ 20. Puntos singulares de una curva . . . . .	328
<i>Ejercicios para el capítulo VIII</i>	

## CAPITULO IX. APLICACIONES DEL CALCULO DIFERENCIAL A LA GEOMETRIA DEL ESPACIO

§ 1. Ecuaciones de la curva en el espacio . . . . .	337
§ 2. Límite y derivada de una función vectorial de un argumento escalar. Ecuación de la tangente a una curva. Ecuación del plano normal . . . . .	340
§ 3. Reglas de derivación de los vectores (funciones vectoriales) . . . . .	347
§ 4. Derivadas primera y segunda de un vector respecto a la longitud del arco. Curvatura de la curva. Normal principal. Velocidad y aceleración del punto durante el movimiento curvilíneo . . . . .	350
§ 5. Plano osculador. Binormal. Torsión . . . . .	360
§ 6. Plano tangente y normal a una superficie . . . . .	365
<i>Ejercicios para el capítulo IX</i>	

## CAPITULO X. INTEGRAL INDEFINIDA

§ 1. Función primitiva e integral indefinida . . . . .	372
§ 2. Tabla de integrales . . . . .	375
§ 3. Algunas propiedades de la integral indefinida . . . . .	377
§ 4. Integración por cambio de variable o por sustitución . . . . .	379
§ 5. Integrales de ciertas funciones que contienen un trinomio cuadrado . . . . .	381
§ 6. Integración por partes . . . . .	385
§ 7. Fracciones racionales. Fracciones racionales elementales y su integración . . . . .	388
§ 8. Descomposición de la fracción racional en fracciones simples . . . . .	392
§ 9. Integración de las fracciones racionales . . . . .	397
§ 10. Método de Ostrogradski . . . . .	400
§ 11. Integrales de las funciones irracionales . . . . .	403
§ 12. Integrales del tipo $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ . . . . .	405
§ 13. Integración de los binomios diferenciales . . . . .	408
§ 14. Integración de ciertas clases de funciones trigonométricas . . . . .	411
§ 15. Integración de ciertas funciones irracionales con ayuda de sustituciones trigonométricas. . . . .	416
§ 16. Funciones cuyas integrales no pueden expresarse mediante las funciones elementales . . . . .	418
<i>Ejercicios para el capítulo X</i>	

## CAPITULO XI. INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. Planteo del problema. Sumas integrales inferior y superior . . . . .	428
§ 2. Integral definida . . . . .	430
§ 3. Propiedades fundamentales de la integral definida . . . . .	437
§ 4. Cálculo de la integral definida. Fórmula de Newton-Leibniz . . . . .	441
§ 5. Sustitución de variable en una integral definida . . . . .	445
§ 6. Integración por partes . . . . .	447
§ 7. Integrales impropias . . . . .	450
§ 8. Cálculo aproximado de las integrales definidas . . . . .	458
§ 9. Fórmula de Chébishev . . . . .	464
§ 10. Integrales dependientes de un parámetro . . . . .	469
§ 11. Integración de una función compleja de una variable real. . . . .	473

*Ejercicios para el capítulo XI*

CAPITULO XII. APLICACIONES GEOMETRICAS  
Y MECANICAS DE LA INTEGRAL DEFINIDA

§ 1. Cálculos de áreas en coordenadas rectangulares . . . . .	478
§ 2. Area de un sector curvilíneo en coordenadas polares . . . . .	481
§ 3. Longitud de un arco de curva . . . . .	483
§ 4. Cálculo del volumen de un cuerpo en función de las áreas de secciones paralelas . . . . .	489
§ 5. Volumen de un cuerpo de revolución . . . . .	491
§ 6. Area de un cuerpo de revolución . . . . .	492
§ 7. Cálculo del trabajo con ayuda de la integral definida . . . . .	494
§ 8. Coordenadas del centro de gravedad . . . . .	496
§ 9. Cálculo del momento de inercia de una línea, de un círculo y de un cilindro mediante la integral definida . . . . .	500
<i>Ejercicios para el capítulo XII.</i> . . . . .	503
<i>Indice alfabético de materias</i> . . . . .	509
<i>Indice</i> . . . . .	513