

# Índice general

<b>1 Ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>1</b>
1.1 Importancia de las ecuaciones diferenciales	1
1.2 Terminología básica	2
1.3 Ecuaciones de primer orden	4
1.4 Ecuaciones con separación de variables	7
1.5 Ecuaciones exactas	12
1.6 Factor de integración	15
1.7 Ecuaciones lineales de primer orden	18
1.8 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de primer orden	20
1.9 Números complejos	26
1.10 Funciones complejas	27
1.11 Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes (caso homogéneo)	29
1.12 Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes (caso no homogéneo)	35
1.13 Método de la variación de los parámetros	40
1.14 Aplicaciones de las ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes	42
1.15 Ecuaciones lineales de orden superior con coeficientes constantes	51
1.16 Espacios lineales y operadores lineales	56
1.17 La ecuación lineal general	58
1.18 Ecuaciones diferenciales no lineales	60
<b>2 Series infinitas</b>	<b>62</b>
2.1 Introducción	62
2.2 Sucesiones: convergencia y divergencia	63
2.3 Sucesiones acotadas, sucesiones monótonas	64
2.4 Series infinitas	68
2.5 La serie geométrica	69
2.6 El criterio del término $n$ -ésimo	70
2.7 Observaciones generales acerca de las series lineales	71
2.8 El criterio de la integral	72
2.9 El criterio de comparación	75

2.10	Convergencia absoluta y convergencia condicional; series alternadas	77
2.11	El criterio de la razón	81
2.12	El criterio de la raíz	83
2.13	Estimación del error al calcular la suma	84
2.14	Sucesiones y series de funciones, series de potencias	86
2.15	Convergencia uniforme	90
2.16	Propiedades de las series de potencias	94
2.17	Más operaciones con las series de potencias	96
2.18	Fórmula de Taylor con residuo	98
2.19	Series de potencias y fórmula de Taylor para funciones de diferentes variables	100
2.20	Series complejas	102
2.21	Aplicación de las series de potencias a la integración y a otros problemas	106
2.22	Soluciones en series de potencias de ecuaciones diferenciales	109
2.23	Soluciones de las ecuaciones diferenciales lineales en un punto singular	113
<b>3</b>	<b>Series de Fourier</b>	<b>121</b>
3.1	Introducción	121
3.2	Series trigonométricas y series de Fourier	122
3.3	Convergencia de las series de Fourier	129
3.4	Serie coseno de Fourier, serie seno de Fourier	135
3.5	Cambio de periodo	138
3.6	Convergencia en la media, desigualdad de Bessel, relación de Parseval	141
3.7	Forma compleja de las series de Fourier	144
3.8	Aplicación de las series de Fourier a la respuesta de frecuencia	146
3.9	Funciones ortogonales	152
3.10	Producto interno y norma	155
3.11	El proceso de Gram-Schmidt	157
3.12	Los polinomios de Legendre	159
3.13	Otros sistemas ortogonales	164
3.14	Problemas de Sturm-Liouville	165
3.15	Sistemas ortogonales en dimensiones superiores	168
<b>4</b>	<b>Cálculo operacional</b>	<b>171</b>
4.1	Introducción	171
4.2	La transformada de Laplace	172
4.3	Propiedades de la transformada de Laplace	173
4.4	Ejemplos	176
4.5	Más acerca de la definición de la transformada de Laplace; aspectos complejos	181
4.6	Fracciones parciales	183
4.7	La transformada inversa de Laplace	186
4.8	Convolución	189
4.9	Funciones generalizadas	192
4.10	Transformadas de Laplace de funciones generalizadas	195
4.11	Aplicación de las transformadas de Laplace a las ecuaciones diferenciales lineales	198
4.12	Aplicación de las transformadas de Laplace de funciones generalizadas a las ecuaciones diferenciales lineales	203

4.13	Transformadas de Fourier	207
4.14	Propiedades de la transformada de Fourier	210
4.15	Teoría de la transformada de Fourier	214
4.16	Transformada inversa de Fourier	217
4.17	Relaciones entre la transformada de Fourier y la transformada de Laplace	219
4.18	Convolución	221
4.19	Transformadas de Fourier de funciones generalizadas	222
4.20	Aplicación de la transformada de Fourier a las ecuaciones diferenciales lineales	225
4.21	Aplicación de la transformada de Fourier de funciones generalizadas a las ecuaciones diferenciales lineales	231
4.22	El teorema de Parseval y el espectro de energía	234

**5 Matrices y álgebra lineal** **236**

5.1	Introducción	236
5.2	Determinantes	239
5.3	Matrices	240
5.4	Suma de matrices. Multiplicación de matrices por escalares	242
5.5	Multiplicación de matrices	244
5.6	Inversa de una matriz cuadrada	250
5.7	Valores propios de una matriz cuadrada	256
5.8	Vectores en un espacio $n$ -dimensional $R^n$	262
5.9	Independencia lineal	264
5.10	Transformaciones lineales de $R^n$ a $R^m$	270
5.11	Rango de una matriz o transformación lineal	276
5.12	Sistemas de ecuaciones lineales: teoría	282
5.13	Sistemas de ecuaciones lineales: técnica	283
5.14	Cálculo de la inversa en una matriz cuadrada	287
5.15	La traspuesta	289
5.16	Matrices ortogonales	291
5.17	Espacios vectoriales generales	296
5.18	Transformaciones lineales	300

**6 Sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias** **306**

6.1	Conceptos generales	306
6.2	Sistemas lineales: teoría general	310
6.3	Sistemas lineales homogéneos con coeficientes constantes	315
6.4	Sistemas lineales no homogéneos con coeficientes constantes	319
6.5	Aplicación a las redes eléctricas	322
6.6	Aplicación de la transformada de Laplace	325
6.7	Método del cambio de variable	329
6.8	Modos normales de vibración	332
6.9	Una generalización	335
6.10	Otras aplicaciones a las redes eléctricas	337
6.11	Estabilidad, matriz de transferencia y matriz de frecuencia de respuesta	343
6.12	Resonancia	347

<b>7</b>	<b>Ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales</b>	<b>350</b>
7.1	El plano de fase	350
7.2	Sistemas conservativos	356
7.3	Estructura de las trayectorias cerca de un punto de equilibrio	360
7.4	Soluciones periódicas; ciclos límite; estabilidad	367
7.5	La ecuación de van der Pol	370
7.6	Ecuaciones tipo péndulo	372
7.7	Poblaciones en competencia. Modelo de Volterra	376
7.8	Oscilaciones forzadas de los sistemas no lineales	378
7.9	Sistemas con discontinuidades	382
<b>8</b>	<b>Introducción a las ecuaciones diferenciales parciales</b>	<b>385</b>
8.1	El origen de las ecuaciones diferenciales parciales en la física	385
8.2	Conceptos generales y problemas típicos	387
8.3	El método de separación de variables: la ecuación de onda unidimensional	391
8.4	Soluciones a la ecuación de onda; ondas progresivas y estacionarias	397
8.5	Otras condiciones de frontera para la ecuación de onda	399
8.6	La ecuación de calor en una dimensión	403
8.7	Otros problemas para la ecuación de calor	406
8.8	La ecuación de Laplace para un rectángulo	410
8.9	El problema de Dirichlet para una región circular	414
8.10	La fórmula integral de Poisson	416
8.11	El problema de Dirichlet para otras regiones	417
8.12	Aplicación de las transformadas de Laplace y de Fourier	418
8.13	Problemas en dimensiones superiores	422
<b>9</b>	<b>Cálculo diferencial vectorial</b>	<b>429</b>
9.1	Introducción	429
9.2	Vectores en el espacio tridimensional	430
9.3	Cálculo de funciones vectoriales de una variable	433
9.4	Funciones de dos variables, derivadas parciales, diferenciales	437
9.5	Generalización a funciones de tres o más variables	442
9.6	La derivada direccional y el vector gradiente	446
9.7	La derivada direccional a lo largo de una trayectoria; derivada normal	448
9.8	La conservación de la energía en el movimiento de una partícula en un campo de fuerza	451
9.9	Máximos y mínimos	453
9.10	Funciones y transformaciones, linealización, matriz jacobiana, determinante jacobiano	458
9.11	Representación paramétrica de superficies	463
9.12	La regla de la cadena para las transformaciones	466
9.13	Funciones implícitas	469
9.14	Curvas de nivel y superficies de nivel	473
9.15	Funciones inversas	474
9.16	Derivadas de orden superior de funciones compuestas	478

El laplaciano en coordenadas polares, cilíndricas y esféricas	479
Derivadas de orden superior de funciones implícitas	481
<b>10 Cálculo integral vectorial</b>	<b>483</b>
10.1 Introducción	483
10.2 Integrales múltiples	484
10.3 La regla de Leibnitz para integrales	489
10.4 Cambio de variables en integrales múltiples	494
10.5 Integrales de línea en el plano	498
10.6 Teorema de Green	506
10.7 Divergencia de un campo vectorial. El teorema de la divergencia en el plano	509
10.8 Rotacional de un campo vectorial. El teorema de Stokes en el plano	511
10.9 Independencia de la trayectoria. Regiones abiertas simplemente conexas	515
10.10 Aplicación a la termodinámica	522
10.11 Integrales de línea en el espacio	526
10.12 Superficies en el espacio. Área de superficies. Orientabilidad	528
10.13 Integrales de superficie	531
10.14 Teorema de Gauss. Divergencia de un campo vectorial en el espacio tridimensional	536
10.15 Teorema de Stokes. Rotacional de un campo vectorial en el espacio	540
10.16 Identidades vectoriales	543
10.17 Integrales independientes de la trayectoria. Campos irrotacionales y campos solenoidales	547
10.18 Aplicaciones físicas: fluidos, conducción de calor y membrana vibrante	550
10.19 Más aplicaciones físicas: electromagnetismo	554
<b>11 Funciones analíticas de una variable compleja</b>	<b>559</b>
11.1 El sistema de los números complejos	559
11.2 Funciones complejas de una variable real	560
11.3 Funciones con valores complejos de una variable compleja. Límites y continuidad	561
11.4 Derivadas y diferenciales	563
11.5 Integrales	565
11.6 Funciones analíticas. Ecuaciones de Cauchy-Riemann	568
11.7 Las funciones $\ln z$ , $a^z$ , $z^a$ , $\text{sen}^{-1}z$ , $\text{cos}^{-1}z$	573
11.8 Integrales de funciones analíticas. Teorema integral de Cauchy	577
11.9 Fórmula integral de Cauchy	580
11.10 Series de potencias como funciones analíticas	583
11.11 Desarrollo de series de potencias de una función analítica en general	585
11.12 Series de potencias positivas y negativas; desarrollo de Laurent	589
11.13 Singularidades aisladas de una función analítica. Ceros y polos	592
11.14 El número complejo $\infty$	594
11.15 Residuos	597
11.16 Residuo en el infinito	601
11.17 Residuos logarítmicos; principio del argumento	603

11.18	Desarrollo en fracciones parciales de funciones racionales	605
11.19	Aplicación de los residuos a la evaluación de integrales reales	607
11.20	Aplicación de los residuos a las transformadas inversas de Fourier	612
11.21	La transformada de Laplace como una función analítica	616
11.22	El criterio de Nyquist	619
11.23	Funciones analíticas multivaluadas. Continuación analítica. Superficies de Riemann.	624
11.24	Residuos que implican funciones multivaluadas	628
11.25	Transformación conforme	633
11.26	Ejemplos de transformación conforme	635
11.27	Aplicaciones de la transformación conforme. El problema de Dirichlet.	642
11.28	El problema de Dirichlet para el semiplano	643
11.29	Transformación conforme en hidrodinámica	649
11.30	Aplicaciones de la transformación conforme a la teoría de la elasticidad	652
11.31	Más aplicaciones de la transformación conforme	653
<b>12</b>	<b>Funciones especiales</b>	<b>655</b>
12.1	Objetivo de este capítulo	655
12.2	Ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden	655
12.3	La función gamma	658
12.4	La función beta	661
12.5	Polinomios ortogonales	662
12.6	Fórmula de recursión para polinomios ortogonales	664
12.7	Otras propiedades de los polinomios ortogonales	665
12.8	Ecuaciones diferenciales para polinomios ortogonales	668
12.9	Las funciones de Legendre asociadas	670
12.10	Armónicas esféricas	671
12.11	Funciones de Bessel	675
12.12	Funciones de Hankel. Serie asintótica	679
12.13	La función hipergeométrica	682
<b>13</b>	<b>Análisis numérico</b>	<b>684</b>
13.1	Introducción	684
13.2	Solución de ecuaciones lineales simultáneas	685
13.3	Solución de ecuaciones algebraicas	690
13.4	Método de Muller	695
13.5	Cálculo de valores propios y vectores propios	698
13.6	Interpolación mediante polinomios	702
13.7	Aproximación mediante polinomios	708
13.8	Aproximación uniforme mediante polinomios	713
13.9	Métodos de Fourier	718
13.10	Métodos de Fourier: formulación compleja	721
13.11	Transformada rápida de Fourier	725
13.12	Diferenciación numérica	730
13.13	Integración numérica	732
13.14	Problemas con valores iniciales para ecuaciones diferenciales ordinarias	739
13.15	Problemas con valores para ecuaciones diferenciales ordinarias	745

13.16	Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales-ecuaciones elípticas	750
13.17	Ecuaciones parabólicas	756
13.18	Ecuaciones hiperbólicas	758
<b>14</b>	<b>El método del elemento finito</b>	<b>761</b>
14.1	Panorama general del tema	761
14.2	Residuos ponderados; método de Galerkin	762
14.3	El papel de la integración por partes	765
14.4	Integración por partes en dos y tres dimensiones	768
14.5	Algunos problemas importantes	771
14.6	Problema de Dirichlet (ilustración del enfoque variacional)	773
14.7	Elementos finitos en una dimensión	776
14.8	Problemas en dos dimensiones	780
14.9	Aproximación de grado superior en dos dimensiones	786
14.10	Referencias	789
<b>15</b>	<b>Probabilidad y estadística</b>	<b>790</b>
15.1	Introducción	790
15.2	Probabilidades en un espacio de muestra finito	790
15.3	Probabilidades condicionales	793
15.4	Permutaciones y combinaciones	796
15.5	Probabilidad en un espacio muestral infinito	798
15.6	Variables aleatorias	801
15.7	Funciones de una variable aleatoria	805
15.8	Función generadora de momento	808
15.9	Distribuciones binomiales y de Poisson	810
15.10	Distribución normal	812
15.11	Distribución conjunta de varias variables aleatorias	814
15.12	Funciones de varias variables aleatorias	820
15.13	Teorema del límite central	822
15.14	Estimación de parámetros	826
	<b>Respuestas a problemas seleccionados</b>	<b>833</b>
	<b>Índice de materias</b>	<b>865</b>

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = E(t) \quad (1-11)$$