

1242

# Indice

<b>Prólogo</b>		<b>V</b>
<b>Números complejos y funciones complejas</b>		
<b>1</b>	<b>Los números complejos</b>	<b>3</b>
1.1.	Los números complejos: introducción . . . . .	3
1.2.	Los números complejos y el álgebra . . . . .	5
1.3.	Los números complejos y la geometría . . . . .	9
1.3.1.	La forma polar . . . . .	11
	Ejercicios y problemas . . . . .	16
<b>2</b>	<b>Sucesiones y series</b>	<b>21</b>
2.1.	Sucesiones convergentes . . . . .	21
2.2.	Sucesiones divergentes y el punto del infinito . . . . .	23
2.3.	Series de números complejos . . . . .	27
2.3.1.	Series biláteras . . . . .	31
	Ejercicios y problemas . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Funciones complejas</b>	<b>37</b>
3.1.	La topología de $\mathbb{C}$ . . . . .	37
3.2.	Funciones complejas de variable real . . . . .	38
3.3.	Funciones complejas de variable compleja . . . . .	42
3.4.	El teorema fundamental del álgebra . . . . .	44
	Ejercicios y problemas . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Funciones holomorfas</b>	<b>53</b>
4.1.	La definición de derivada . . . . .	53
4.2.	Las condiciones de Cauchy-Riemann . . . . .	54
4.3.	Propiedades de las derivadas . . . . .	57
	Ejercicios y problemas . . . . .	64

## Funciones analíticas

<b>5</b>	<b>La integral curvilínea</b>	<b>71</b>
5.1.	Caminos . . . . .	71
5.2.	La integral curvilínea. Primitivas . . . . .	78
	Ejercicios y problemas . . . . .	85
<b>6</b>	<b>El teorema de Cauchy-Goursat. Funciones logarítmicas</b>	<b>87</b>
6.1.	El teorema de Cauchy-Goursat . . . . .	87
6.1.1.	Conjuntos estrellados y primitivas . . . . .	92
6.2.	Las funciones logarítmicas . . . . .	95
	Ejercicios y problemas . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Series de potencias. Funciones elementales</b>	<b>105</b>
7.1.	Series de potencias complejas . . . . .	106
7.1.1.	Derivación de una serie de potencias . . . . .	108
7.2.	Las funciones elementales . . . . .	113
7.2.1.	La función exponencial . . . . .	113
7.2.2.	Las funciones trigonométricas . . . . .	116
7.2.3.	Las funciones hiperbólicas . . . . .	119
7.2.4.	Potencias complejas . . . . .	119
7.3.	Series de potencias biláteras . . . . .	121
	Ejercicios y problemas . . . . .	123
<b>8</b>	<b>Funciones analíticas</b>	<b>131</b>
8.1.	Funciones analíticas . . . . .	132
8.1.1.	Índice de un camino cerrado . . . . .	134
8.2.	Funciones holomorfas en un abierto . . . . .	139
8.2.1.	La serie binómica . . . . .	141
8.3.	Las consecuencias . . . . .	145
8.3.1.	Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville . . . . .	145
8.3.2.	Principio de los ceros aislados . . . . .	147
8.3.3.	Principio del módulo máximo . . . . .	150
8.3.4.	La regla de l'Hôpital . . . . .	151
	Ejercicios y problemas . . . . .	152
<b>9</b>	<b>Series de Laurent. El teorema de los residuos</b>	<b>157</b>
9.1.	Serie de Laurent en un anillo . . . . .	157
9.2.	Singularidades aisladas. Clasificación . . . . .	165
9.3.	El teorema de los residuos . . . . .	167
	Ejercicios y problemas . . . . .	173

<b>10 Aplicaciones del teorema de los residuos</b>	<b>175</b>
10.1. Cálculo de integrales reales	176
10.1.1. Integrales del tipo $\int_0^{2\pi} R(\text{sen } t, \text{cos } t) dt$	176
10.1.2. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) dt$	178
10.1.3. Integrales del tipo $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \text{cos } at dt$ ó $\int_{-\infty}^{+\infty} F(t) \text{sen } at dt$	182
10.1.4. Integrales de funciones con polos en el eje real	185
10.1.5. Integrales del tipo $\int_0^{+\infty} t^a F(t) dt$	189
10.2. Principio del argumento. Teorema de Rouché	192
Ejercicios y problemas	197

### Convergencia uniforme

<b>11 Sucesiones y series de funciones de variable compleja</b>	<b>203</b>
11.1. Convergencia puntual y uniforme	203
11.1.1. El teorema de Morera	205
11.1.2. Convergencia uniforme y derivación	206
11.2. Series de funciones	208
Ejercicios y problemas	210

<b>12 Integración paramétrica</b>	<b>215</b>
12.1. Integrales paramétricas propias	215
12.2. Integrales paramétricas impropias	219
12.2.1. Integrales impropias de primera especie	220
12.2.2. Integrales paramétricas impropias de primera especie	221
12.2.3. Integrales paramétricas impropias de segunda especie	225
12.2.4. Integrales paramétricas impropias: caso general	227
Ejercicios y problemas	228

<b>13 Las funciones de Euler</b>	<b>231</b>
13.1. La función Gamma	231
13.1.1. La función Gamma de variable real	234
13.1.2. Prolongación analítica de Gamma	238
13.2. La función Beta	242
13.3. Relación entre las funciones $\beta$ y $\Gamma$	246
13.4. Aplicaciones de las funciones de Euler	248
13.4.1. La fórmula de Wallis	248
13.4.2. La distribución normal	250
Ejercicios y problemas	251

## Apéndices

<b>A</b>	<b>Sucesiones y series de funciones reales. Series de potencias</b>	<b>259</b>
A.1.	Sucesiones de funciones . . . . .	259
A.1.1.	Convergencia puntual y uniforme . . . . .	260
A.1.2.	Convergencia uniforme, continuidad e integrabilidad . . . . .	264
A.1.3.	Convergencia uniforme y derivación . . . . .	266
A.2.	Series de funciones . . . . .	267
A.2.1.	Criterios de convergencia uniforme para series de funciones . . . . .	270
A.3.	Series de potencias . . . . .	275
A.3.1.	Serie de Taylor de una función . . . . .	280
A.3.2.	Teorema del límite de Abel . . . . .	284
<b>B</b>	<b>Integrales paramétricas reales</b>	<b>287</b>
B.1.	Integral paramétrica propia . . . . .	288
B.1.1.	Extremos dependientes del parámetro . . . . .	295
B.2.	Integral paramétrica impropia . . . . .	298
B.2.1.	Integrales paramétricas impropias de primera especie . . . . .	299
B.2.2.	Integrales paramétricas impropias de segunda especie . . . . .	304
B.2.3.	El caso general . . . . .	306
	<b>Lista de figuras</b>	<b>310</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>311</b>
	<b>Índice alfabético</b>	<b>315</b>