

# ÍNDICE



UNIVERSIDAD NACIONAL DE ENTRE RÍOS  
FACULTAD DE INGENIERÍA  
CENTRO DE MEDIOS  
BIBLIOTECA

Nº 0046

INTRODUCCIÓN .....	7
--------------------	---

## PRIMERA PARTE. VECTORES

### I. ÁLGEBRA VECTORIAL

1. Vectores: sus clases .....	13
1. Magnitudes escalares y vectoriales; 2. Vectores; 3. Igualdad de vectores; 4. Vectores deslizantes y vectores fijos.	
Ejercicios .....	17
2. Componentes y cosenos directores de un vector .....	17
1. Componentes de un vector; 2. Cosenos directores de un vector; 3. Vectores paralelos; 4. Angulo de dos vectores.	
Ejercicios .....	22
3. Adición y sustracción de vectores .....	23
1. Adición de vectores; 2. Sustracción de vectores; 3. Suma algebraica de varios vectores; 4. Producto de un vector por un escalar; 5. Versores fundamentales. Descomposición canónica de un vector; 6. Descomposición de un vector por sus componentes según tres direcciones dadas; 7. Baricentro de un sistema de masas; 8. Coordenadas baricéntricas.	
Ejercicios .....	30
4. Producto escalar y producto vectorial .....	32
1. Producto escalar; 2. Las dos orientaciones del espacio; 3. Vectores axiales o pseudovectores; 4. Producto vectorial; 5. Componentes del producto vectorial; 6. Producto escalar y vectorial de pseudovectores.	
Ejercicios .....	41
5. Producto mixto y otros productos vectoriales .....	42
1. Producto mixto de tres vectores; 2. Pseudoescalares; 3. Doble producto vectorial; 4. Otros productos vectoriales; 5. Álgebra vectorial en el plano.	
Ejercicios .....	46

## VECTORES Y TENSORES

6. Notas y complementos del capítulo I .....	47
1. Definición axiomática de vector. Espacios vectoriales; 2. Diversas notaciones para el producto escalar y vectorial.	
<b>II. APLICACIONES DEL ÁLGEBRA VECTORIAL</b>	
7. Las fórmulas fundamentales de la trigonometría ....	50
1. Trigonometría plana; 2. Trigonometría esférica.	
Ejercicios .....	53
8. Aplicaciones a la geometría analítica .....	53
1. Puntos y vectores; 2. Ecuación vectorial de la recta; 3. Ecuación vectorial del plano; 4. Distancia de un punto a un plano; 5. Distancia de un punto a una recta; 6. Mínima distancia entre dos rectas; 7. Propiedades angulares entre rectas y planos; 8. Volumen del tetraedro; 9. Geometría analítica del plano; 10. Teorema de Menelao.	
Ejercicios .....	66
9. Notas y complementos del capítulo II .....	68
1. Teorema de Ptolomeo; 2. Área del cuadrilátero; 3. Teorema de Carnot; 4. Circunferencia de los nueve puntos; 5. Cónica por cinco puntos; 6. Una propiedad del ortotetraedro; 7. Teorema de Pohlke; 8. Vectores deslizantes. Fuerzas; 9. Aplicaciones a la navegación aérea.	
<b>III. LOS VECTORES Y LOS CAMBIOS DE COORDENADAS</b>	
10. Cambios de coordenadas cartesianas ortogonales .....	73
1. El problema fundamental; 2. Cambio de versores fundamentales; 3. Cambios de coordenadas.	
Ejercicios .....	78
11. Definición analítica de vector .....	78
1. Transformación de las componentes de un vector por cambios de coordenadas ortogonales; 2. Definición analítica de vector; 3. Cambios de coordenadas en el plano; 4. Escalares y pseudoescalares.	
Ejercicios .....	85
12. Notas y complementos del capítulo III .....	85
1. Forma explícita de las transformaciones ortogonales; 2. Ángulos de Euler; 3. Cuaterniones.	
<b>IV. ANÁLISIS VECTORIAL. OPERADORES VECTORIALES</b>	
13. Campos escalares. Gradiente .....	89
1. Campos escalares; 2. El gradiente de una función de punto; 3. Propiedades geométricas del gradiente; 4. Superficies de nivel y líneas de gradiente; 5. Derivadas direccionales; 6. Derivada total y derivada parcial de un escalar o un vector respecto del tiempo.	
Ejercicios .....	95
14. Campos vectoriales. Divergencia de un vector .....	96
1. Campos vectoriales; 2. Divergencia de un vector; 3. Interpretaciones físicas de la divergencia.	
Ejercicios .....	103

15. El rotor .....	103
1. El rotor; 2. Líneas de rotor o torbellino; 3. Significado físico del rotor. Ejemplos; 4. Velocidad angular. Otra interpretación del rotor.	
Ejercicios .....	110
16. El laplaciano. Fórmulas vectoriales .....	111
1. El operador "nabla"; 2. El laplaciano; 3. Laplaciano de un vector.	
4. Fórmulas vectoriales; 5. Líneas de campo normales a superficies.	
Ejercicios .....	116
17. Los operadores vectoriales en coordenadas curvilíneas .....	117
1. Coordenadas polares en el plano y en el espacio; 2. Coordenadas curvilíneas en general; 3. Coordenadas curvilíneas ortogonales; 4. Las componentes de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales; 5. El gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales; 6. La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales; 7. El laplaciano en coordenadas curvilíneas ortogonales; 8. El rotor en coordenadas curvilíneas ortogonales; 9. El laplaciano de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales.	
Ejercicios .....	128
18. Notas y complementos del capítulo IV .....	128
1. Coordenadas elipsoidales; 2. Coordenadas cilíndrico-parabólicas; 3. Coordenadas parabólicas; 4. Coordenadas esféricas; 5. Coordenadas toroidales.	

V. FÓRMULAS INTEGRALES

19. Derivación de vectores. Curvas. Integrales curvilíneas .....	133
1. Vectores función de un parámetro; 2. Vector función de varios parámetros; 3. Curvas. Tangente. Elemento de arco; 4. Integrales curvilíneas; 5. Circulación.	
Ejercicios .....	142
20. Superficies. Integrales de superficie .....	143
1. Superficies. Versor normal; 2. Elemento de arco sobre una superficie; 3. Integrales dobles y triples. Formas diferenciales exteriores; 4. Elemento de área sobre una superficie; 5. Integral de superficie; 6. Flujo.	
Ejercicios .....	155
21. Teorema de la divergencia. Fórmulas de Green .....	156
1. Teorema de la divergencia. Fórmula integral de Gauss-Ostrogradski; 2. El teorema de la divergencia para el plano; 3. Consecuencias del teorema de la divergencia; 4. Casos particulares de la fórmula de Gauss; 5. Fórmulas de Green; 6. La ecuación de Laplace. Funciones armónicas. Tercera fórmula de Green; 7. Aplicaciones de las fórmulas de Green.	
Ejercicios .....	165
22. Teorema del rotor .....	166
1. Teorema del rotor. Fórmula de Stokes; 2. Casos particulares de la fórmula de Stokes; 3. Líneas y tubos de torbellino; 4. Superficies orientables y no orientables; 5. Diferenciación exterior de formas diferenciales.	
Ejercicios .....	174

15. El rotor .....	103
1. El rotor; 2. Líneas de rotor o torbellino; 3. Significado físico del rotor. Ejemplos; 4. Velocidad angular. Otra interpretación del rotor.	
Ejercicios .....	110
16. El laplaciano. Fórmulas vectoriales .....	111
1. El operador "nabla"; 2. El laplaciano; 3. Laplaciano de un vector.	
4. Fórmulas vectoriales; 5. Líneas de campo normales a superficies.	
Ejercicios .....	116
17. Los operadores vectoriales en coordenadas curvilíneas .....	117
1. Coordenadas polares en el plano y en el espacio; 2. Coordenadas curvilíneas en general; 3. Coordenadas curvilíneas ortogonales; 4. Las componentes de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales; 5. El gradiente en coordenadas curvilíneas ortogonales; 6. La divergencia en coordenadas curvilíneas ortogonales; 7. El laplaciano en coordenadas curvilíneas ortogonales; 8. El rotor en coordenadas curvilíneas ortogonales; 9. El laplaciano de un vector en coordenadas curvilíneas ortogonales.	
Ejercicios .....	128
18. Notas y complementos del capítulo IV .....	128
1. Coordenadas elipsoidales; 2. Coordenadas cilíndrico-parabólicas; 3. Coordenadas parabólicas; 4. Coordenadas esféricas; 5. Coordenadas toroidales.	

V. FÓRMULAS INTEGRALES

19. Derivación de vectores. Curvas. Integrales curvilíneas .....	133
1. Vectores función de un parámetro; 2. Vector función de varios parámetros; 3. Curvas. Tangente. Elemento de arco; 4. Integrales curvilíneas; 5. Circulación.	
Ejercicios .....	142
20. Superficies. Integrales de superficie .....	143
1. Superficies. Versor normal; 2. Elemento de arco sobre una superficie; 3. Integrales dobles y triples. Formas diferenciales exteriores; 4. Elemento de área sobre una superficie; 5. Integral de superficie; 6. Flujo.	
Ejercicios .....	155
21. Teorema de la divergencia. Fórmulas de Green .....	156
1. Teorema de la divergencia. Fórmula integral de Gauss-Ostrogradski; 2. El teorema de la divergencia para el plano; 3. Consecuencias del teorema de la divergencia; 4. Casos particulares de la fórmula de Gauss; 5. Fórmulas de Green; 6. La ecuación de Laplace. Funciones armónicas. Tercera fórmula de Green; 7. Aplicaciones de las fórmulas de Green.	
Ejercicios .....	165
22. Teorema del rotor .....	166
1. Teorema del rotor. Fórmula de Stokes; 2. Casos particulares de la fórmula de Stokes; 3. Líneas y tubos de torbellino; 4. Superficies orientables y no orientables; 5. Diferenciación exterior de formas diferenciales.	
Ejercicios .....	174

23. Campos de gradientes y de rotores ..... 175

1. Definiciones; 2. Campos de gradientes; 3. Campos de rotores; 4. Descomposición de un campo vectorial en suma de uno irrotacional y otro solenoidal; 5. Observaciones sobre la unicidad; 6. Campo engendrado por un hilo de torbellino; 7. Caso de una curva cerrada; 8. Angulo sólido; 9. Integral de Gauss.

Ejercicios ..... 190

24. Notas y complementos del capítulo V ..... 190

1. Nota histórica; 2. Campos vectoriales en el plano: característica de una curva e índice de un punto; 3. Campos vectoriales tangentes a una superficie; 4. Teoremas sobre puntos fijos; 5. Sobre campos solenoidales.

VI. APLICACIONES DEL ANÁLISIS VECTORIAL

25. Aplicaciones a la teoría de curvas ..... 197

1. Triángulo de Frenet; 2. Fórmulas de Frenet; 3. Cálculo de la curvatura y de la torsión; 4. Definición geométrica de la curvatura y de la torsión; 5. Esfera osculatriz; 6. Curvas esféricas; 7. Superficies retilíneas; 8. Superficies desarrollables.

Ejercicios ..... 208

26. Aplicaciones al electromagnetismo ..... 209

1. Las ecuaciones de Maxwell; 2. Potencial escalar y potencial vector del campo electromagnético; 3. Energía del campo electromagnético. Vector de Poynting; 4. Ondas electromagnéticas.

Ejercicios ..... 215

27. Aplicaciones a la mecánica de fluidos ..... 216

1. La ecuación de continuidad y la ecuación de Euler; 2. Otras formas e integrales de la ecuación de Euler; 3. Torbellinos.

Ejercicios ..... 222

28. Notas y complementos del capítulo VI ..... 223

1. Funciones de Bessel y de Legendre; 2. Movimiento relativo.

SEGUNDA PARTE. TENSORES

VII. TRANSFORMACIONES LINEALES. MATRICES

29. El espacio afín de  $n$  dimensiones ..... 231

1. Espacios  $n$ -dimensionales; 2. El espacio afín  $n$ -dimensional; 3. El espacio euclidiano  $n$ -dimensional.

Ejercicios ..... 234

30. Transformaciones lineales. Matrices ..... 235

1. Transformaciones lineales; 2. Producto de transformaciones lineales; 3. Adición, sustracción y producto por un escalar; 4. Matriz traspuesta de otra.

Ejercicios ..... 238

31. Matrices cuadradas ..... 239  
 1. Matrices cuadradas. Transformaciones inversas; 2. Algunas propiedades de las matrices; 3. Matrices simétricas y antisimétricas; 4. Potencia de una matriz; 5. Grupos lineales general y especial.

Ejercicios ..... 243

32. Transformaciones y matrices ortogonales ..... 244

1. Transformaciones y matrices ortogonales; 2. Propiedades de los elementos de una matriz ortogonal; 3. Matrices ortogonales de segundo orden.

Ejercicios ..... 247

33. Notas y complementos del capítulo VII ..... 247

1. Representación de Cayley para las matrices ortogonales.

VIII. TENSORES CARTESIANOS

34. Tensores cartesianos ..... 249

1. El convenio de supresión del símbolo de suma; 2. Tensores cartesianos del espacio ordinario; 3. Paso a  $n$  dimensiones; 4. Invariantes. Producto escalar de vectores.

Ejercicios ..... 254

35. Operaciones con tensores cartesianos ..... 255

1. Adición, sustracción y producto de tensores; 2. Contracción de índices; 3. Permutación de índices; 4. Tensores simétricos y antisimétricos; 5. Derivación de tensores; 6. Criterio para reconocer el carácter tensorial.

Ejercicios ..... 260

36. Tensores de segundo orden ..... 260

1. El tensor de Kronecker; 2. Tensores deducidos de un tensor de segundo orden; 3. Reducción de un tensor simétrico a la forma diagonal.

Ejercicios ..... 268

37. Pseudotensores o densidades tensoriales ..... 268

1. Pseudotensores o densidades tensoriales; 2. El pseudotensor o densidad tensorial de Levi-Civita; 3. Propiedades de las densidades tensoriales. Dualidad.

Ejercicios ..... 271

38. Tensores cartesianos isotrópicos. Unicidad de los operadores vectoriales elementales ..... 272

1. Tensores cartesianos isotrópicos; 2. Unicidad de los operadores vectoriales elementales.

Ejercicios ..... 276

39. Notas y complementos del capítulo VIII ..... 277

1. Tensor isotrópico de cuarto orden; 2. Invariantes de un tensor de segundo orden en el espacio de tres dimensiones.

## VECTORES Y TENSORES

### IX. APLICACIONES DE LOS TENSORES CARTESIANOS

40. Ejemplos de tensores cartesianos. Aplicaciones a la elasticidad .....	278
1. El tensor de inercia; 2. Tensor de deformación; 3. Tensor de tensiones; 4. Tensor elástico.	
41. El espacio-tiempo. La relatividad especial .....	284
1. El espacio de cuatro dimensiones; 2. El espacio-tiempo de Lorentz-Minkowski; 3. Las fórmulas de Lorentz; aplicaciones.	
42. Ecuaciones relativistas de la física .....	290
1. Ecuaciones relativistas de la física; 2. Campo escalar; 3. Campo vectorial; 4. Ecuaciones de Maxwell; 5. Campo determinado por un tensor de segundo orden simétrico.	
43. Notas y complementos del capítulo IX .....	295
1. Transformaciones que dejan invariante una forma cuadrática; 2. La fórmula de Gauss en el espacio-tiempo.	

### X. TENSORES EN GENERAL

44. Tensores en general. Álgebra tensorial .....	298
1. Coordenadas curvilíneas; 2. Vectores contravariantes y covariantes; 3. Tensores en general; 4. Ejemplos de tensores; 5. Operaciones con tensores; 6. Contracción de índices; 7. Invariantes; 8. Criterio para reconocer el carácter tensorial; 9. Pseudotensores o densidades tensoriales; 10. Tensores y pseudotensores obtenidos por derivación ordinaria.	
Ejercicios .....	307
45. Derivación covariante .....	308
1. Derivación covariante de vectores; 2. Derivación covariante de tensores; 3. Derivación covariante de densidades tensoriales.	
Ejercicios .....	314
46. Espacios de conexión afín .....	315
1. Espacios de conexión afín; 2. Paralelismo de vectores; 3. Propiedades del tensor de curvatura; 4. Espacios de conexión afín simétrica; 5. Las identidades de Bianchi.	
Ejercicios .....	320
47. Espacios de Riemann .....	321
1. Espacios de Riemann; 2. El tensor fundamental; 3. Ascenso y descenso de índices. Componentes covariantes y contravariantes de un vector; 4. Producto escalar de vectores. Sistemas coordenados ortogonales; 5. Los símbolos de Christoffel. La conexión de Levi-Civita; 6. Relaciones entre los símbolos de Christoffel.	
Ejercicios .....	327
48. Curvas geodésicas. Tensor de curvatura .....	328
1. Curvas extremales; 2. Líneas geodésicas; 3. Operadores diferenciales; 4. Componentes físicas de un vector; 5. El tensor de curvatura en espacios de Riemann; 6. Tensores deducidos del de curvatura por contracción; 7. Laplaciano de un vector.	
Ejercicios .....	336

49. Idea de la teoría de la relatividad general .....	336
1. La relatividad general; 2. La solución de Schwarzschild; 3. Geodésicas del espacio de Schwarzschild.	
SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS .....	343
BIBLIOGRAFÍA .....	365
ÍNDICE ALFABÉTICO .....	369