



CAPÍTULO I · ELEMENTOS DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

§ 1. Concepto de conjunto. Operaciones sobre conjuntos

1. Definiciones principales (13). 2. Operaciones sobre conjuntos (14).

§ 2. Equivalencia de conjuntos. Concepto de potencia de un conjunto

1. Conjuntos finitos e infinitos (17). 2. Conjuntos numerables (17). 3. Equivalencia de conjuntos (20). 4. Innumerabilidad del conjunto de los números reales (22). 5. Concepto de potencia de un conjunto (24). 6. Teorema de Cantor—Bernstein (26).

§ 3. Aplicaciones. Partición en clases

1. Aplicaciones de conjuntos. Concepto general de función (28). 2. Partición en clases. Relación de equivalencia (30).

§ 4. Conjuntos ordenados. Números transfinitos

1. Conjuntos parcialmente ordenados (33). 2. Aplicaciones que conservan el orden (34). 3. Conjuntos ordenados. Tipos ordinales (34). 4. Suma ordenada de conjuntos ordenados (35). 5. Conjuntos bien ordenados. Números transfinitos (36). 6. Comparación de números ordinales (38). 7. Axioma de elección, teorema de Zermelo y otras proposiciones equivalentes a ellos (41). 8. Inducción transfinita (42).

§ 5. Sistemas de conjuntos

1. Anillo de conjuntos (43). 2. Semianillo de conjuntos (45). 3. Anillo engendrado por un semianillo (47). 4. Algebras de Borel (48). 5. Sistemas de conjuntos y aplicaciones (49).

CAPÍTULO II · ESPACIOS METRICOS Y TOPOLÓGICOS

§ 1. Concepto de espacio métrico

1. Definición y ejemplos principales (51). 2. Aplicaciones continuas de espacios métricos. Isometría (59).

§ 2. Convergencia. Conjuntos abiertos y cerrados

1. Puntos de acumulación. Adherencia (60). 2. Convergencia (62). 3. Subconjuntos densos (63). 4. Conjuntos abiertos y cerrados (64). 5. Conjuntos abiertos y cerrados sobre la recta (66). *cto de Cantor*

§ 3. Espacios métricos completos

1. Definición y ejemplos de espacios métricos completos (71). 2. Principio de bolas encajadas (74). 3. Teorema de Baire (75). 4. Completación de un espacio (76).

§ 4. Principio de aplicaciones contraídas y sus aplicaciones

1. Principio de aplicaciones contraídas (79). 2. Aplicaciones elementales del principio de aplicaciones contraídas (81). 3. Teoremas de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales (83). 4. Aplicación del principio de aplicaciones contraídas a ecuaciones integrales (86).

§ 5. Espacios topológicos

1. Definición y ejemplos de espacios topológicos (89). 2. Comparación de topologías (91). 3. Sistemas determinantes de vecindades. Base. Axiomas de numerabilidad (92). 4. Sucesiones convergentes en T (96). 5. Axiomas de separabi-

lidad (97). 6. Aplicaciones continuas. Homeomorfismo (100). 7. Distintos métodos de definición de topologías en un espacio. Metrizable (103).

§ 6. Compacidad

1. Concepto de compacidad (104). 2. Aplicaciones continuas de espacios compactos (106). 3. Compacidad numerable (107). 4. Conjuntos relativamente compactos (110).

§ 7. Compacidad en espacios métricos

1. Acotación total (110). 2. Compacidad y acotación total (112). 3. Compacidad relativa de subconjuntos en un espacio métrico (114). 4. Teorema de Arzelá (115). 5. Teorema de Peano (117). 6. Teorema generalizado de Arzelá (119).

§ 8. Funciones reales sobre espacios métricos y topológicos

1. Funciones y funcionales continuas y uniformemente continuas (121). 2. Funciones continuas y semicontinuas sobre espacios compactos (123).

§ 9. Curvas continuas en espacios métricos (125)

CAPÍTULO III · ESPACIOS LINEALES NORMADOS Y TOPOLÓGICOS

§ 1. Espacios lineales

1. Definición y ejemplos de espacios lineales (130). 2. Dependencia lineal (132). 3. Subespacios (133). 4. Espacios cocientes (134). 5. Funcionales lineales (136). 6. Interpretación geométrica de una funcional lineal (137).

§ 2. Conjuntos convexos y funcionales convexas. Teorema de Hahn—Banach

1. Conjuntos convexos y cuerpos convexos (140). 2. Funcionales convexas (142). 3. Funcional de Minkowski (143). 4. Teorema de Hahn—Banach (144). 5. Separabilidad de conjuntos convexos en espacios lineales (147).

§ 3. Espacios normados

1. Definición y ejemplos de espacios normados (149). 2. Subespacios de un espacio normado (151).

§ 4. Espacios euclídeos

1. Definición de espacios euclídeos (152). 2. Ejemplos (154). 3. Existencia de bases ortogonales, ortogonalización (156). 4. Desigualdad de Bessel. Sistemas ortogonales cerrados (159). 5. Espacios euclídeos completos. Teorema de Riesz—Fisher (162). 6. Espacio de Hilbert. Teorema sobre el isomorfismo (165). 7. Subespacios, complementos ortogonales, suma directa (168). 8. Propiedad característica de los espacios euclídeos (172). 9. Espacios euclídeos complejos (175).

§ 5. Espacios topológicos lineales

1. Definición y ejemplos (177). 2. Convexidad local (180). 3. Espacios normados numerables (181).

CAPÍTULO IV · FUNCIONALES LINEALES Y OPERADORES LINEALES

§ 1. Funcionales lineales continuas

1. Funcionales lineales continuas sobre espacios topológicos lineales (185). 2. Relación entre la continuidad de una funcional lineal y su acotación sobre conjuntos acotados (186). 3. Funcionales lineales continuas sobre espacios normados (187). 4. Teorema de Hahn—Banach en un espacio normado (190). 5. Funcionales lineales en espacios normados numerables (191). 6. Existencia de un número suficiente de funcionales lineales continuas (192).

§ 2. Espacio dual

1. Definición de espacio dual (193). 2. Espacio dual a un espacio normado (194). 3. Ejemplos de espacios duales (196). 4. Estructura del espacio dual a un espacio normado numerable (200). 5. Topología en el espacio dual (202). 6. Segundo espacio dual (203).

§ 3. Topología débil y convergencia débil

1. Topología débil en un espacio topológico lineal (205). 2. Convergencia débil (206). 3. Topología débil y convergencia débil en el espacio dual (211). 4. Topología * -débil en conjuntos acotados (213).

§ 4. Funciones generalizadas

1. Ampliación del concepto de función (216). 2. Espacio de funciones básicas (218). 3. Funciones generalizadas (219). 4. Operaciones con funciones generalizadas (220). 5. Suficiencia del conjunto de funciones básicas (224). 6. Reconstrucción de una función por su derivada. Ecuaciones diferenciales en la clase de funciones generalizadas (225). 7. Algunas generalizaciones (228).

§ 5. Operadores lineales

1. Definición y ejemplos de operadores lineales (232). 2. Continuidad y acotación (236). 3. Suma y producto de operadores (238). 4. Operador inverso, inversibilidad (239). 5. Operadores conjugados (244). 6. Operador conjugado en un espacio euclídeo. Operadores autoconjugados (246). 7. Espectro de un operador. Resolvente (247).

§ 6. Operadores totalmente continuos

1. Definición y ejemplos de operadores totalmente continuos (250). 2. Propiedades principales de operadores totalmente continuos (255). 3. Valores propios de un operador totalmente continuo (258). 4. Operadores totalmente continuos en un espacio de Hilbert (259). 5. Operadores autoconjugados y totalmente continuos en H (260).

NO
CAPÍTULO V · ELEMENTOS DEL CÁLCULO DIFERENCIAL
EN ESPACIOS LINEALES

§ 1. Diferenciación en espacios lineales

1. Diferencial fuerte (diferencial de Fréchet) (265). 2. Diferencial débil (diferencial de Gato). (267). 3. Fórmula de incremento finito (268). 4. Relación entre las diferenciabilidades débil y fuerte (269). 5. Funcionales diferenciables (271). 6. Funciones abstractas (271). 7. Integral (271). 8. Derivadas de órdenes superiores (274). 9. Diferenciales de orden superior (276). 10. Fórmula de Taylor (277).

§ 2. Problemas extremales

1. Condición necesaria de extremo (278). 2. Segunda diferencial. Condiciones suficientes de extremo de una funcional (282).

§ 3. Método de Newton

CAPÍTULO VI · MEDIDA, FUNCIONES MEDIBLES, INTEGRAL

§ 1. Medida de conjuntos planos

1. Medida de conjuntos elementales (290). 2. Medida de Lebesgue de conjuntos planos (294). 3. Propiedades principales de la medida de Lebesgue y de los conjuntos medibles (295). 4. Algunos suplementos y generalizaciones (304).

§ 2. Concepto general de medida. Prolongación de una medida de un semianillo a un anillo. Aditividad y σ -aditividad

1. Definición de medida (306). 2. Prolongación de una medida en un semianillo al anillo generado (308). 3. Aditividad numerable (309).

§ 3. Prolongación de Lebesgue de una medida

1. Prolongación de Lebesgue de una medida definida en un semianillo con unidad (313). 2. Prolongación de una medida definida en un semianillo sin unidad (317). 3. Prolongación de una medida según Jordan (319). 4. Unicidad de prolongación de una medida (321).

§ 4. Funciones medibles

1. Definición y propiedades principales de funciones medibles (322). 2. Funciones simples (324). 3. Operaciones aritméticas con funciones medibles (325). 4. Equivalencia (327). 5. Convergencia en casi todos los puntos (328). 6. Teorema de Egórov (328). 7. Convergencia en medida (330). 8. Teorema de Luzin. C-propiedad (332).

§ 5. Integral de Lebesgue

1. Integral de Lebesgue para funciones simples (333). 2. Integral de Lebesgue en conjuntos de medida finita (335). 3. σ -aditividad y continuidad absoluta de la integral de Lebesgue (338). 4. Paso al límite bajo el signo de la integral de Lebesgue (343). 5. Integral de Lebesgue en un conjunto de medida infinita (347). 6. Comparación de la integral de Lebesgue con la integral de Riemann (348).

§ 6. Productos directos de sistemas de conjuntos y de medidas. Teorema de Fubini

1. Productos de sistemas de conjuntos (352). 2. Productos de medidas (353). 3. Representación de la medida plana en términos de la integral de la medida lineal de secciones y definición geométrica de la integral de Lebesgue (355). 4. Teorema de Fubini (359).

CAPÍTULO VII · INTEGRAL INDEFINIDA DE LEBESGUE. TEORÍA DE DIFERENCIACIÓN

§ 1. Funciones monótonas. Diferenciabilidad de la integral respecto al extremo superior

1. Propiedades fundamentales de funciones monótonas (364). 2. Diferenciabilidad de una función monótona (368). 3. Derivada de la integral respecto al extremo superior (374).

§ 2. Funciones de variación acotada (374)

§ 3. Derivada de la integral indefinida de Lebesgue (379)

§ 4. Reconstrucción de una función a partir de su derivada. Funciones absolutamente continuas (381)

§ 5. Integral de Lebesgue como función de conjunto. Teorema de Radon-Nikodym

1. Cargas. Descomposición de Hahn y descomposición de Jordan (392). 2. Principales tipos de cargas (395). 3. Cargas absolutamente continuas. Teorema de Radon-Nikodym (396).

§ 6. Integral de Stieltjes

1. Medidas de Stieltjes (399). 2. Integral de Lebesgue-Stieltjes (401). 3. Algunas aplicaciones de la integral de Lebesgue-Stieltjes en la teoría de probabili-

dades (403). 4. Integral de Riemann-Stieltjes (406). 5. Paso al límite bajo el signo de la integral de Stieltjes (409). 6. Representación general de funcionales lineales continuas en el espacio de funciones continuas (413)

CAPÍTULO VIII · ESPACIOS DE FUNCIONES SUMABLES

§ 1. Espacio L_1

1. Definición y propiedades fundamentales del espacio L_1 (415). 2. Conjuntos siempre densos en L_1 (419).

§ 2. Espacio L_2

1. Definición y propiedades fundamentales (423). 2. Caso de medida infinita (426). 3. Conjuntos siempre densos en L_2 . Teorema sobre el isomorfismo (428). 4. Espacio complejo L_2 (429). 5. Convergencia cuadrática y su relación con otros tipos de convergencia de sucesiones funcionales (430).

§ 3. Sistemas ortogonales de funciones en L_2 . Series respecto a sistemas ortogonales

1. Sistema trigonométrico. Serie trigonométrica de Fourier (433). 2. Sistemas trigonométricos en el segmento $[0, \pi]$ (436). 3. Forma compleja de la serie de Fourier (436). 4. Polinomios de Legendre (438). 5. Sistemas ortogonales en productos. Series múltiples de Fourier (440). 6. Polinomios ortogonales respecto a un núcleo dado (442). 7. Base ortogonal en el espacio $L_2(-\infty, \infty)$. Funciones de Hermite (444). 8. Polinomios ortogonales respecto a un núcleo discreto (445).

CAPÍTULO IX · SERIES TRIGONOMÉTRICAS TRANSFORMACIÓN DE FOURIER

§ 1. Condiciones de convergencia de la serie de Fourier

1. Condiciones suficientes de convergencia de la serie de Fourier en un punto (449). 2. Condiciones de convergencia uniforme de la serie de Fourier (456).

§ 2. Teorema de Fejér

1. Teorema de Fejér (459). 2. Completitud del sistema trigonométrico. Teorema de Weierstrass (462). 3. Teorema de Fejér en el caso del espacio L_1 (463).

§ 3. Integral de Fourier

1. Teorema fundamental (464). 2. Forma compleja de la integral de Fourier (467).

§ 4. Transformación de Fourier, sus propiedades y sus aplicaciones

1. Transformación de Fourier y fórmula de inversión (468). 2. Propiedades fundamentales de la transformación de Fourier (472). 3. Completitud de las funciones de Hermite y de Laguerre (475). 4. Transformación de Fourier de funciones indefinidamente diferenciables y rápidamente decrecientes (476). 5. Transformación de Fourier y convolución de funciones (478). 6. Aplicación de la transformación de Fourier a la resolución de la ecuación de conducción del calor (479). 7. Transformación de Fourier de funciones de varias variables (482).

§ 5. Transformación de Fourier en el espacio $L_2(-\infty, \infty)$

1. Teorema de Plancherel (484). 2. Funciones de Hermite (487).

§ 6. Transformación de Laplace

1. Definición y propiedades fundamentales de la transformación de Laplace (491). 2. Aplicación de la transformación de Laplace a la solución de ecuaciones diferenciales (método operacional) (492).

§ 7. Transformación de Fourier-Stieltjes

1. Definición de la transformación de Fourier-Stieltjes (494). 2. Aplicación de la transformación de Fourier-Stieltjes a la teoría de probabilidades (496).

§ 8. Transformación de Fourier de funciones generalizadas (499)

CAPÍTULO X · ECUACIONES INTEGRALES LINEALES

§ 1. Definiciones fundamentales. Algunos problemas que llevan a ecuaciones integrales

1. Tipos de ecuaciones integrales (502). 2. Ejemplos de problemas que llevan a ecuaciones integrales (504).

§ 2. Ecuaciones integrales de Fredholm

1. Operador Integral de Fredholm (507). Ecuaciones de núcleo simétrico (510). 3. Teoremas de Fredholm. Caso de núcleo degenerado (512). 4. Teoremas de Fredholm para ecuaciones de núcleos no degenerados (504). 5. Ecuaciones de Volterra (519). 6. Ecuaciones integrales de primera especie (520).

§ 3. Ecuaciones integrales con parámetro. Método de Fredholm

1. Espectro de un operador totalmente continuo en H (521). 2. Representación de la solución en forma de una serie de potencias de λ . Determinantes de Fredholm (522).

Bibliografía (528)

Índice alfabético (530)