

# INDICE

Del prólogo de la primera edición . . . . .	15
---------------------------------------------	----

## CAPITULO I

### CLASIFICACION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

§ 1. Clasificación de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden . . . . .	17
1. Ecuaciones diferenciales con dos variables independientes (17).	
2. Clasificación de las ecuaciones de segundo orden con varias variables independientes (24).	
3. Formas canónicas de las ecuaciones lineales con coeficientes constantes (27).	
Ejercicios del capítulo I . . . . .	29

## CAPITULO II

### ECUACIONES DE TIPO HIPERBOLICO

§ 1. Problemas simples que se reducen a ecuaciones de tipo hiperbólico. Planteamiento de los problemas de contorno . . . . .	30
1. Ecuación de las oscilaciones transversales pequeñas de una cuerda (30).	
2. Ecuación de las oscilaciones longitudinales de las barras y las cuerdas (34).	
3. Energía de las oscilaciones de una cuerda (36).	
4. Deducción de la ecuación de las oscilaciones eléctricas en los cables (38).	
5. Oscilaciones transversales de una membrana (39).	
6. Ecuaciones de la hidrodinámica y de la acústica (42).	
7. Condiciones de frontera e iniciales (47).	
8. Reducción del problema general (52).	
9. Planteamiento de los problemas de contorno para el caso de varias variables (54).	
10. Teorema de unicidad (55). Ejercicios (58).	
§ 2. Método de la propagación de las ondas . . . . .	60
1. Fórmula de D'Alembert (60).	
2. Interpretación física (62).	
3. Ejemplos (65).	
4. Ecuación no homogénea (69).	
5. Estabilidad de las soluciones (71).	
6. Semirrecta y método de las continua-	

ciones (75). 7. Problemas para un segmento acotado (83). 8. Dispersión de las ondas (86). 9. Ecuación integral de las oscilaciones (88). 10. Propagación de las discontinuidades a lo largo de las características (92). Ejercicios (94).

§ 3. Método de separación de las variables . . . . .	97
1. Ecuación de las oscilaciones libres de una cuerda (97). 2. Interpretación de la solución (103). 3. Representación de oscilaciones cualesquiera en forma de superposición de ondas estacionarias (107). 4. Ecuaciones no homogéneas (112). 5. Primer problema general de contorno (119). 6. Problemas de contorno con segundos miembros estacionarios (120). 7. Problemas sin condiciones iniciales (122). 8. Fuerza concentrada (127). 9. Esquema general del método de separación de las variables (131). Ejercicios (137).	
§ 4. Problema con condiciones en las características . . . . .	139
1. Planteamiento del problema (139). 2. Método de las aproximaciones sucesivas para el problema de Goursat (141). Ejercicios (147).	
§ 5. Resolución de las ecuaciones lineales generales de tipo hiperbólico . . . . .	147
1. Operadores diferenciales conjugados (147). 2. Forma integral de la solución (148). 3. Interpretación física de la función de Riemann (152). 4. Ecuaciones con coeficientes constantes (155).	
Ejercicios del capítulo II . . . . .	159
<b>Apéndices del capítulo II</b> . . . . .	160
I. Sobre las oscilaciones de las cuerdas de los instrumentos musicales . . . . .	160
II. Sobre las oscilaciones de las barras . . . . .	163
III. Oscilaciones de una cuerda cargada . . . . .	168
1. Planteamiento del problema (168). 2. Oscilaciones propias de una cuerda cargada (169). 3. La cuerda con un peso en el extremo (173). 4. Correcciones para los valores propios (174).	
IV. Ecuaciones de la dinámica de los gases y teoría de las ondas de choque . . . . .	175
1. Ecuaciones de la dinámica de los gases. Ley de conservación de la energía (175). 2. Ondas de choque. Condiciones de compatibilidad dinámica (178). 3. Discontinuidades débiles (185).	
V. Dinámica de la sorción de los gases . . . . .	189
1. Ecuaciones que describen el proceso de sorción de un gas (189). 2. Solución asintótica (193).	
VI. Analogías físicas . . . . .	201

## CAPITULO III

## ECUACIONES DE TIPO PARABOLICO

205

§ 1. Problemas simples que se reducen a ecuaciones de tipo parabólico. Planteamiento de los problemas de contorno . . . . .	205
1. Problema lineal de la propagación del calor (205). 2. Ecuación de la difusión (209). 3. Propagación del calor en el espacio (211). 4. Planteamiento de los problemas de contorno (213). 5. Principio del valor máximo (220). 6. Teorema de unicidad (223). 7. Teorema de unicidad para la recta infinita (226).	
§ 2. Método de separación de las variables . . . . .	227
1. Problema de contorno homogéneo (227). 2. Función de la fuente (231). 3. Problemas de contorno con condiciones iniciales discontinuas (234). 4. Ecuación no homogénea de la conducción del calor (241). 5. Primer problema general de contorno (244). Ejercicios (246).	
§ 3. Problemas en la recta infinita . . . . .	248
1. Propagación del calor en la recta infinita. Función de la fuente para una región no acotada (248). 2. Problemas de contorno para la semirecta (262).	
§ 4. Problemas sin condiciones iniciales . . . . .	270
Ejercicios del capítulo III . . . . .	274
<b>Apéndices del capítulo III</b> . . . . .	276
I. Ondas térmicas . . . . .	276
II. Influencia de la desintegración radiactiva en la temperatura de la corteza terrestre . . . . .	280
III. Método de la semejanza en la teoría de la conducción del calor . . . . .	286
1. Función de la fuente para la recta infinita (286). 2. Problemas de contorno para la ecuación cuasilineal de la conducción del calor (289).	
IV. Problema del cambio de fase . . . . .	291
V. Ecuación de Einstein—Kolmogórov . . . . .	296
VI. Función $\delta$ . . . . .	300
1. Definición de la función $\delta$ (300). 2. Desarrollo de la función $\delta$ en serie de Fourier (303). 3. Aplicación de la función $\delta$ a la composición de la función de la fuente (305).	

CAPITULO IV  
ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO

- § 1. Problemas que se reducen a la ecuación de Laplace . . . . . 309
1. Campo térmico estacionario. Planteamiento de los problemas de contorno (309). 2. Corriente potencial de un líquido. Potencial de una corriente estacionaria y de un campo electrostático (310). 3. Ecuación de Laplace en un sistema de coordenadas curvilíneas (312). 4. Ciertas soluciones particulares de la ecuación de Laplace (317). 5. Funciones armónicas y funciones analíticas de variable compleja (318). 6. Transformación de los radios-vector inversos (320).
- § 2. Propiedades generales de las funciones armónicas . . . . . 322
1. Fórmulas de Green. Representación integral de la solución (323). 2. Ciertas propiedades fundamentales de las funciones armónicas (329). 3. Unicidad y estabilidad del primer problema de contorno (333). 4. Problemas con condiciones discontinuas de frontera (334). 5. Puntos singulares aislados (336). 6. Regularidad de una función armónica de tres variables en el infinito (338). 7. Problemas externos de contorno. Unicidad de la solución para los problemas bi- y tridimensionales (339). 8. Segundo problema de contorno. Teorema de unicidad (343).
- § 3. Resolución de los problemas de contorno para las regiones simples por el método de separación de las variables . . . . . 346
1. Primer problema de contorno para el círculo (346). 2. Integral de Poisson (351). 3. Caso de valores discontinuos de frontera (354).
- § 4. Función de la fuente . . . . . 356
1. Función de la fuente para la ecuación  $\Delta u = 0$  y sus propiedades fundamentales (356). 2. Método de las imágenes electrostáticas y función de la fuente para la esfera (362). 3. Función de la fuente para el círculo (365). 4. Función de la fuente para el semiespacio (367).
- § 5. Teoría del potencial . . . . . 368
1. Potencial de volumen (369). 2. Problema en el plano. Potencial logarítmico (371). 3. Integrales impropias (373). 4. Derivadas primeras del potencial de volumen (381). 5. Derivadas segundas del potencial de volumen (385). 6. Potenciales de superficie (388). 7. Superficies y curvas de Liapunov (393). 8. Discontinuidad del potencial de doble capa (396). 9. Propiedades del potencial de capa simple (400). 10. Aplicación de los potenciales de superficie a la resolución de los problemas de contorno (404). 11. Ecuaciones integrales correspondientes a los problemas de contorno (409).

Ejercicios del capítulo IV . . . . .	414
<b>Apéndices del capítulo IV . . . . .</b>	<b>416</b>
I. Expresión asintótica del potencial de volumen . . . . .	416
II. Problemas de la electrostática . . . . .	419
III. Problema fundamental de la exploración eléctrica . . . . .	425
IV. Determinación de los campos vectoriales . . . . .	432
V. Aplicación del método de la transformación conforme a la electrostática . . . . .	436
VI. Aplicación del método de la transformación conforme a la hidrodinámica . . . . .	440
VII. Ecuación biarmónica . . . . .	447
1. Unicidad de la solución (448). 2. Representación de las funciones biarmónicas mediante las armónicas (449). 3. Resolución de la ecuación biarmónica para el círculo (451).	

## CAPÍTULO V

## PROPAGACION DE LAS ONDAS EN EL ESPACIO

1. Problema con condiciones iniciales . . . . .	452
1. Ecuación de las oscilaciones en el espacio (452). 2. Método de promediación (455). 3. Fórmula de Poisson (456). 4. Método del descenso (458). 5. Interpretación física (460). 6. Método de la reflexión (463).	
§ 2. Fórmula integral . . . . .	464
1. Deducción de la fórmula integral (464). 2. Corolarios de la fórmula integral (468).	
§ 3. Oscilaciones de volúmenes acotados . . . . .	471
1. Esquema general del método de separación de las variables. Ondas estacionarias (471). 2. Oscilaciones de una membrana rectangular (478). 3. Oscilaciones de una membrana circular (482).	
Ejercicios del capítulo V . . . . .	488
<b>Apéndices del capítulo V . . . . .</b>	<b>489</b>
I. Reducción de las ecuaciones de la teoría de la elasticidad a las ecuaciones de las oscilaciones . . . . .	489
II. Ecuaciones del campo electromagnético . . . . .	493
1. Ecuaciones del campo electromagnético y condiciones de frontera (493). 2. Potenciales del campo electromagnético (497). 3. Campo electromagnético de un oscilador (500).	

## CAPITULO VI

## PROPAGACION DEL CALOR EN EL ESPACIO

§ 1. Propagación del calor en el espacio no acotado . . . . .	508
1. Función de la influencia de temperatura (508). 2. Propagación del calor en el espacio no acotado (513).	
§ 2. Propagación del calor en cuerpos acotados . . . . .	517
1. Esquema del método de separación de las variables (517). 2. Enfriamiento de un cilindro circular (521). 3. Determinación de las dimensiones críticas (524).	
§ 3. Problemas de contorno para las regiones con fronteras móviles . . . . .	526
1. Fórmula de Green para la ecuación de la conducción del calor y función de la fuente (526). 2. Resolución del problema de contorno (530). 3. Función de la fuente para el segmento (532).	
§ 4. Potenciales térmicos . . . . .	535
1. Propiedades de los potenciales térmicos de capas simple y doble (535). 2. Resolución de los problemas de contorno (537).	
Ejercicios del capítulo VI . . . . .	539
Apéndices del capítulo VI . . . . .	540
I. Difusión de una nube . . . . .	540
II. Sobre la desmagnetización de un cilindro con una bobina . . . . .	543

## CAPITULO VII

## ECUACIONES DE TIPO ELIPTICO (CONTINUACION)

§ 1. Problemas fundamentales que se reducen a la ecuación $\Delta v + cv = 0$ . . . . .	550
1. Oscilaciones permanentes (550). 2. Difusión de un gas con desintegración y con reacciones en cadena (551). 3. Difusión en un medio móvil (551). 4. Planteamiento de los problemas interiores de contorno para la ecuación $\Delta v + cv = 0$ (553).	
§ 2. Funciones de influencia de las fuentes puntuales . . . . .	554
1. Funciones de influencia de las fuentes puntuales (554). 2. Representación integral de la solución (557). 3. Potenciales (561).	

§ 3. Problemas para una región no acotada. Principio de la irradiación . . . . .	564
1. Ecuación $\Delta v + cv = -f$ en el espacio no acotado (564).	
2. Principio de la absorción límite (565). 3. Principio de la amplitud límite (567). 4. Condiciones de irradiación (568).	
§ 4. Problemas de la teoría matemática de la difracción . . . . .	574
1. Planteamiento del problema (574). 2. Unicidad de la solución del problema de la difracción (575). 3. Difracción en la esfera (579).	
Ejercicios del capítulo VII . . . . .	586
Apéndices del capítulo VII . . . . .	588
I. Ondas en tubos cilíndricos . . . . .	588
II. Oscilaciones electromagnéticas en resonadores huecos . . . . .	599
1. Oscilaciones propias de un endovibrador cilíndrico (600). 2. Energía electromagnética de las oscilaciones propias (604). 3. Excitación de las oscilaciones en un endovibrador (607).	
III. Efecto epidérmico . . . . .	609
IV. Propagación de las ondas de radio sobre la superficie de la tierra . . . . .	615

## COMPLEMENTO I

## METODO DE LAS DIFERENCIAS FINITAS

§ 1. Conceptos fundamentales . . . . .	620
1. Mallas y funciones de malla (621). 2. Aproximación de los operadores diferenciales más simples (622). 3. Problema de diferencias (629). 4. Estabilidad (631).	
§ 2. Esquemas de diferencias para la ecuación de la conducción del calor . . . . .	635
1. Esquemas para la ecuación con coeficientes constantes (635).	
2. Error de aproximación (637). 3. Identidad energética (639).	
4. Estabilidad (643). 5. Convergencia y exactitud (647). 6. Esquemas de diferencias para las ecuaciones con coeficientes variables (648). 7. Método del balance. Esquemas conservativos (649).	
8. Esquemas de dos capas para la ecuación de la conducción del calor con coeficientes variables (654). 9. Esquemas de tres capas (661). 10. Resolución de sistemas de ecuaciones en diferencias. Método del deslizamiento (663). 11. Métodos de diferencias de resolución de las ecuaciones cuasilineales (666).	

- § 3. Método de diferencias finitas para la resolución del problema de Dirichlet . . . . . 670
1. Aproximación de diferencias del operador de Laplace (670).  
 2. Principio del valor máximo (675). 3. Acotación de la solución de la ecuación no homogénea (678). 4. Convergencia de la solución del problema en diferencias de Dirichlet (679). 5. Resolución de las ecuaciones en diferencias por el método de iteración simple (681).
- § 4. Métodos de diferencias de resolución de problemas con varias variables espaciales . . . . . 683
1. Esquemas multidimensionales (683). 2. Esquemas económicos (687). 3. Métodos iterativos de direcciones variables para la resolución del problema en diferencias de Dirichlet (697).

## COMPLEMENTO II

## FUNCIONES ESPECIALES

1. Introducción (701). 2. Ecuación general de la teoría de las funciones especiales (703). 3. Comportamiento de las soluciones en un entorno de  $x = a$ , si  $k(a) = 0$  (704). 4. Planteamiento de los problemas de contorno (707).

- PARTE I. FUNCIONES CILINDRICAS . . . . . 709
- § 1. Funciones cilíndricas . . . . . 709
1. Series de potencias (710). 2. Fórmulas de recurrencia (715).  
 3. Funciones de orden semientero (716). 4. Orden asintótico de las funciones cilíndricas (718).
- § 2. Problemas de contorno para la ecuación de Bessel . . . . . 721
- § 3. Diferentes tipos de funciones cilíndricas . . . . . 725
1. Funciones de Hankel (725). 2. Funciones de Hankel y de Neumann (727). 3. Funciones de argumento imaginario (730).  
 4. Función  $K_0(x)$  (732).
- § 4. Representación de las funciones cilíndricas en forma de integrales de contorno . . . . . 736
1. Integrales de contorno (736). 2. Funciones de Hankel (738).  
 3. Ciertas propiedades de la función gamma (739). 4. Representación integral de la función de Bessel (741). 5. Representación integral de  $K_\nu(x)$  (743). 6. Fórmulas asintóticas para las funciones cilíndricas (745).



§ 5. Integral de Fourier—Bessel y ciertas integrales que contienen a las funciones de Bessel . . . . .	748
1. Integral de Fourier—Bessel (748). 2. Ciertas integrales que contienen las funciones de Bessel (750).	
PARTE II. FUNCIONES ESFERICAS . . . . .	753
§ 1. Polinomios de Legendre . . . . .	753
1. Función generatriz y polinomios de Legendre (753). 2. Fórmulas de recurrencia (755). 3. Ecuación de Legendre (756). 4. Ortogonalidad de los polinomios de Legendre (757). 5. Norma de los polinomios de Legendre (758). 6. Ceros de los polinomios de Legendre (759). 7. Acotación de los polinomios de Legendre (760).	
§ 2. Funciones adjuntas de Legendre . . . . .	760
1. Funciones adjuntas (760). 2. Norma de las funciones adjuntas (761). 3. Carácter cerrado del sistema de funciones adjuntas (762).	
§ 3. Polinomios armónicos y funciones esféricas . . . . .	765
1. Polinomios armónicos (765). 2. Funciones esféricas (766). 3. Ortogonalidad del sistema de funciones esféricas (770). 4. Plenitud del sistema de funciones esféricas (773). 5. Desarrollo en funciones esféricas (774).	
§ 4. Ciertos ejemplos de aplicación de las funciones esféricas . . .	778
1. Problema de Dirichlet para la esfera (778). 2. Esfera conductora en el campo de una carga puntual (779). 3. Polarización de una esfera en un campo homogéneo (780). 4. Oscilaciones propias de una esfera (783). 5. Problema exterior de contorno para la esfera (786).	
PARTE III. POLINOMIOS DE CHEBISHOV—HERMITE Y CHEBISHOV—LAGUERRE . . . . .	788
§ 1. Polinomios de Chebishov—Hermite . . . . .	788
1. Fórmula diferencial (788). 2. Fórmulas de recurrencia (789). 3. Ecuación de Chebishov—Hermite (790). 4. Norma de los polinomios $H_n(x)$ (790). 5. Funciones de Chebishov—Hermite (791).	
§ 2. Polinomios de Chebishov—Laguerre . . . . .	792
1. Fórmula diferencial (792). 2. Fórmulas de recurrencia (792). 3. Ecuación de Chebishov—Laguerre (793). 4. Ortogonalidad y norma de los polinomios de Chebishov—Laguerre (793). 5. Polinomios generalizados de Chebishov—Laguerre (794).	

§ 3. Problemas simples para la ecuación de Schrödinger . . . . .	796
1. Ecuación de Schrödinger (796). 2. Oscilador armónico (798).	
3. Rotador (799). 4. Movimiento de un electrón en un campo de Coulomb (801).	
PARTE IV. FORMULAS, TABLAS Y GRAFICAS . . . . .	806
I. Propiedades fundamentales de las funciones especiales . . .	806
II. Tablas . . . . .	811
III. Gráficas de las funciones especiales . . . . .	814
IV. Diferentes sistemas ortogonales de coordenadas . . . . .	816